Q12 * Mathematik * Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße

1. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X.

x	-2	2	4	5
P(X = x)	0,4	0,1	?	0,2

   a) Bestimmen Sie $P(X = 4)$ und den Erwartungswert $E(X)$.
   b) Bestimmen Sie die Varianz $Var(X)$.

2. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X.

x	-2	1	3	4
P(X = x)	0,3	0,2	a	b

   a) Bestimmen Sie a und b so, dass für den Erwartungswert von X gilt $E(X) = 1{,}5$.
   b) Berechnen Sie nun noch die Standardabweichung von X.

3. In einer Urne befinden sich sechs 50-Cent-Münzen, drei 1€-Münzen und eine 2€-Münze.
   Es werden zufällig zwei Münzen (ohne Zurücklegen) herausgenommen.
   X = „Geldbetrag der beiden gezogenen Münzen"
   a) Erstellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X und berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$.
   b) Bestimmen Sie nun die Standardabweichung von X.

4. Peter bietet folgendes Spiel zu einem Einsatz von x € an.
   Es werden 2 Würfel geworfen. Wenn der Betrag der Augendifferenz größer als 3 ist, so erhält der Spieler seinen Einsatz zurück und zusätzlich 5,00 €.
   Welchen Einsatz muss Peter mindestens verlangen, wenn er durchschnittlich pro Spiel mindestens 10 Cent gewinnen will?

5. In einer Urne befinden sich 8 weiße und 2 rote Kugeln.
   a) Es werden zufällig zwei Kugeln ohne Zurücklegen entnommen.
      Wie viele rote Kugeln kann man durchschnittlich erwarten?
   b) Es werden 3 Kugeln ohne Zurücklegen entnommen.
      Wie viele rote Kugeln kann man durchschnittlich erwarten?

6. Hans würfelt mit einem L-Würfel 5-mal hintereinander.
   Die Zufallsgröße X gibt dabei die Anzahl der geworfenen „Sechser" an.
   Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an und zeigen Sie, dass $E(x) = \frac{5}{6}$ gilt.

Q12 * Mathematik * Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße * Lösungen

1. a) $P(X=4)=1-0,4-0,1-0,2=0,3$

$E(X)=-2\cdot 0,4+2\cdot 0,1+4\cdot 0,3+5\cdot 0,2=1,6$

b) $Var(X)=(-2-1,6)^2\cdot 0,4+(2-1,6)^2\cdot 0,1+(4-1,6)^2\cdot 0,3+(5-1,6)^2\cdot 0,2=9,24$

2. a) (1) $1=0,3+0,2+a+b \Leftrightarrow a+b=0,5 \Leftrightarrow b=0,5-a$

(2) $E(X)=1,5 \Leftrightarrow -0,6+0,2+3a+4b=1,5 \Leftrightarrow 3a+4b=1,9$

(1) in (2) $3a+4\cdot(0,5-a)=1,9 \Leftrightarrow 3a+2-4a=1,9 \Leftrightarrow 0,1=a$

Also $a=0,1$ und $b=0,4$

b) $Var(X)=(-2-1,5)^2\cdot 0,3+(1-1,5)^2\cdot 0,2+(3-1,5)^2\cdot 0,1+(4-1,5)^2\cdot 0,4=6,45$

3. a)

x	1€	1,50€	2,50€	2,0€	3€
P(X = x)	$\frac{30}{90}$	$\frac{36}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{6}{90}$	$\frac{6}{90}$

$$E(X)=\frac{30€}{90}+\frac{54€}{90}+\frac{30€}{90}+\frac{12€}{90}+\frac{18€}{90}=\frac{144€}{90}=1,60€$$

b) $$Var(X)=\frac{1}{90}\left[(-0,60€)^2\cdot 30+(-0,10€)^2\cdot 36+(0,90€)^2\cdot 12+(0,40€)^2\cdot 6+(1,40€)^2\cdot 6\right]=$$

$$Var(X)=\frac{28}{75}€^2\approx 0,37€^2 \quad \text{und} \quad \sigma=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{28}{75}€^2}=\frac{2\cdot\sqrt{21}}{15}€\approx 0,61€$$

4. Z = „Reingewinn für Peter“

z	x €	-5,00 €
P(Z = z)	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(Z)=\frac{5\cdot x€}{6}+\frac{-5€}{6}=\frac{5\cdot(x-1)€}{6}$$

$$E(Z)\geq 0,10€ \Leftrightarrow \frac{5\cdot(x-1)€}{6}\geq 0,10€ \Leftrightarrow x\geq 1+\frac{0,6}{5}=1,12$$

Peter muss also mindestens 1,12 € Einsatz verlangen.

5. X = „Anzahl roter Kugeln“

a) $E(X)=0\cdot\frac{28}{45}+1\cdot\frac{16}{45}+2\cdot\frac{1}{45}=\frac{18}{45}=\frac{2}{5}=0,40$

x	0	1	2
P(X = x)	28/45	16/45	1/45

Durchschnittlich kann man 0,4 rote Kugeln erwarten.

b) $E(X)=1\cdot\frac{56}{120}+2\cdot\frac{8}{120}=\frac{3}{5}=0,6$

x	0	1	2	3
P(X = x)	56/120	56/120	8/120	0

Durchschnittlich kann man 0,6 rote Kugeln erwarten.

6.

x	0	1	2	3	4	5
P(X = x)	$\frac{5^5}{6^5}$	$\frac{\binom{5}{1}\cdot 5^4}{6^5}$	$\frac{\binom{5}{2}\cdot 5^3}{6^5}$	$\frac{\binom{5}{3}\cdot 5^2}{6^5}$	$\frac{\binom{5}{4}\cdot 5}{6^5}$	$\frac{1}{6^5}$

$$E(X)=\left(\binom{5}{1}\cdot 5^4+2\cdot\binom{5}{2}\cdot 5^3+3\cdot\binom{5}{3}\cdot 5^2+4\cdot\binom{5}{4}\cdot 5+5\cdot 1\right):6^5=$$

$$\frac{3125+2500+750+100+5}{7776}=\frac{6480}{7776}=\frac{5}{6}$$