Q11 * Mathematik * Anwendungsaufgaben zur Ableitung einer Funktion

Physik

Für die Geschwindigkeit v eines Körpers gilt: $v(t_o) \approx \frac{\triangle x}{\triangle t} = \frac{x_1 - x_o}{t_1 - t_o}$

Mit mathematischer Grenzwertbildung folgt: $v(t_o) = \lim\limits_{t_1 \to t_o} \frac{x_1 - x_o}{t_1 - t_o} = \frac{dx}{dt}(t_o) = \dot{x}(t_o)$

$\dot{x}(t_o)$ gibt dabei die Ableitung der Orts-Funktion $x = x(t)$ nach der Zeit t an.

Entsprechend gilt für die Beschleunigung a dieses Körpers:

$a(t_o) \approx \frac{\triangle v}{\triangle t} = \frac{v_1 - v_o}{t_1 - t_o}$ und damit $a(t_o) = \lim\limits_{t_1 \to t_o} \frac{v_1 - v_o}{t_1 - t_o} = \frac{dv}{dt}(t_o) = \dot{v}(t_o) = \ddot{x}(t_o)$

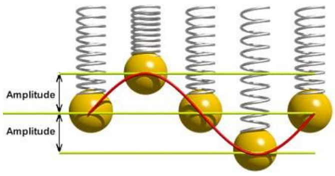
$\ddot{x}(t_o)$ gibt dabei die zweite Ableitung der Orts-Funktion $x = x(t)$ an.

Mit dem zweiten newtonschen Gesetz gilt also: $F(t) = m \cdot a(t) = m \cdot \dot{v}(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$

1. a) Begründen Sie, dass für eine Bewegung (in x-Richtung) mit der konstanten Beschleunigung a (in x-Richtung) die Ortsfunktion $x = x(t)$ folgendermaßen lautet:

   $x = x(t) = x_o + v_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$. Welche Bedeutung haben dabei x_o und v_o ?

   b) Ein Ball der Masse 500g wird mit der Anfangsgeschwindigkeit 15 ms^{-1} nach oben geworfen. Welche Höhe und Geschwindigkeit hat der Ball nach 1,0s ? Welche maximale Höhe erreicht er und wann schlägt er wieder am Boden auf? (g = 10 ms^{-2})



2. Die Auslenkung y eines Federpendels, das mit der Amplitude A = 5,0cm und der Schwingungsdauer T = 3,0s schwingt, lautet

   $y(t) = 5{,}0cm \cdot \sin(\frac{2\pi}{3{,}0s} \cdot t)$.

   a) Bestimmen Sie die maximale Geschwindigkeit nach „oben”. Wann tritt diese Geschwindigkeit jeweils auf?

   b) Bestimmen Sie zum Zeitpunkt $t_1 = 2{,}6s$ die Auslenkung $y(t_1)$, die Geschwindigkeit $v(t_1)$ und die Beschleunigung $a(t_1)$.

   c) Welche maximale Beschleunigung erfährt der Pendelkörper? Bei welcher Auslenkung tritt diese maximale Beschleunigung auf?

Wirtschaft

3. Die Herstellungskosten einer Anzahl x gleicher Geräte wird durch die Kostenfunktion K(x) beschrieben.

   Es gelte z.B. $K(x) = (0{,}0015\,x^3 - 1{,}8\,x^2 + 820\,x + 5000)$ €

   a) Überlegen Sie, welche Kosten durch jeden einzelnen der in K(x) auftretenden Terme beschrieben wird. (Vorzeichen beachten!)

   b) Die Ableitung K´(x) wird Grenzkostenfunktion genannt.
   Begründen Sie, dass K´(x) angenähert angibt, welche Kosten für die Herstellung des Geräts mit der Nummer x +1 anfallen.

   c) Bestimmen Sie die Grenzkostenfunktion für unser Beispiel.
   Für welche Anzahl x ergeben sich die kleinsten Grenzkosten?

   d) Für welche Anzahl an hergestellten Geräten liegen die Grenzkosten unter 150 € ?