

# Mathematik \* Jahrgangsstufe 10 \* Aufgaben zu rationalen Funktionen

## Ganzrationale Funktionen

1. Finden Sie möglichst viele Eigenschaften der Funktion  $f$  mit der Funktionsgleichung  $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$  heraus. Hat der Graph Hoch- bzw. Tiefpunkte? Skizzieren Sie den Graphen!
2. Gesucht ist eine möglichst einfache Polynomfunktion mit der Nullstelle  $x_1 = 1$  und den Punkten  $(0/4)$ ,  $(-1/2)$  und  $(2/-7)$  auf dem Graphen. Ermitteln Sie weitere Nullstellen der Funktion. Hat der Graph Hoch- bzw. Tiefpunkte. Skizzieren Sie den Graphen!

## Gebrochenrationale Funktionen

3. Finden Sie möglichst viele Eigenschaften der Funktionen mit dem Funktionsterm  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$  heraus (Definitionsbereich, Nullstellen, Symmetrie, Grenzwertverhalten). Skizzieren Sie anschließend den Graphen.

4. Untersuchen Sie wie bei Aufgabe 3 die Funktion mit dem Funktionsterm

$$f(x) = \frac{5x}{x^2 + 4} .$$

Begründen Sie, ob der Graph von  $f$  Hoch-, bzw. Tiefpunkte besitzt.

(Für Experten: Für welche Werte von  $a$  hat  $f(x) = a$  genau eine Lösung? Bestimmen Sie daraus die genaue Lage des Hoch- und Tiefpunktes!)

Skizzieren Sie anschließend den Graphen.

5. Untersuchen Sie wie bei Aufgabe 3 die Funktion mit dem Funktionsterm

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{5x} .$$

Zeigen Sie, dass sich der Graph von  $f$  für  $x \rightarrow \pm \infty$  einer Geraden (einer so genannten Asymptote) „anschmiegt“.

Skizzieren Sie anschließend den Graphen.



Mathematik \* Jahrgangsstufe 10 \* Aufgaben zu rationalen Funktionen \* Lösungen

1.  $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$

$f(x) = x \cdot (x^2 - x - 6) = x \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)$

Nullstellen:  $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -2$

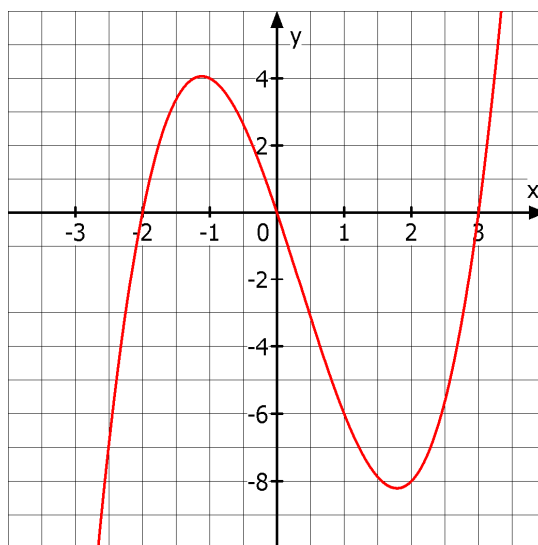
Für  $x \rightarrow +\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow +\infty$

Für  $x \rightarrow -\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow -\infty$

Im Bereich  $] -2 ; 0 [$  liegt ein HOP,

im Bereich  $] 0 ; 3 [$  ein TIP.

Die genaue Lage des Hoch- und Tiefpunktes kann nicht ermittelt werden.



2. Ansatz:  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(1)  $f(1) = 0$       (2)  $f(0) = 4$

(3)  $f(-1) = 2$       (4)  $f(2) = -7$

liefert dann

$f(x) = 0,5x^3 - 3x^2 - 1,5x + 4$

Polynomdivision liefert

$f(x) = (x - 1) \cdot (0,5x^2 - 2,5x - 4)$

Weitere Nullstellen aus

$0,5x^2 - 2,5x - 4 = 0$

$x_{2/3} = 2,5 \pm 0,5 \cdot \sqrt{57}$

$x_2 \approx 6,3 ; x_3 \approx -1,3$

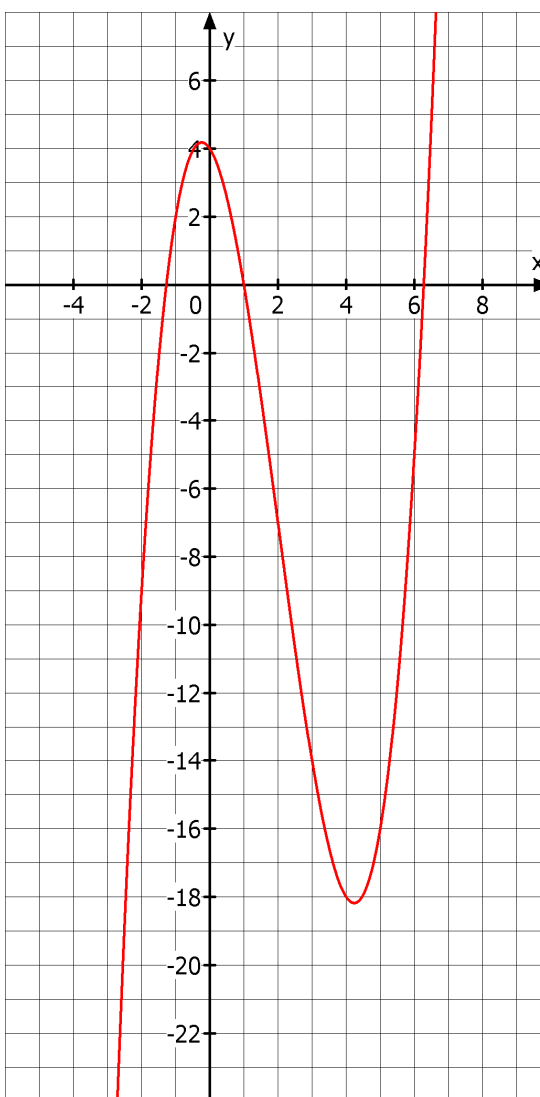
Für  $x \rightarrow +\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow +\infty$ , denn

$f(x) = x^3 \cdot (0,5 - \frac{3}{x} - \frac{1,5}{x^2} + \frac{4}{x^3}) \rightarrow$

$"+\infty \cdot (0,5 - 0 - 0 + 0)" = +\infty ;$

analog: für  $x \rightarrow -\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow -\infty$

Zwischen den Nullstellen liegen ein HOP und ein TIP, deren genaue Lage aber nicht ermittelt werden kann.



$$3. f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

Nenner darf nicht 0 sein, daher  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ .

Nullstelle:  $x_1 = 0$

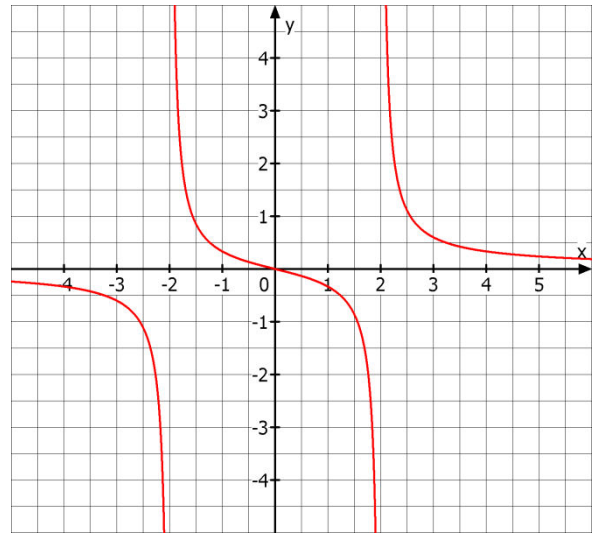
Punktsymmetrie zum Ursprung wegen  $f(-x) = -f(x)$

Für  $x \rightarrow \pm\infty$  gilt

$$f(x) = f(x) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} \rightarrow \frac{\pm 0}{1 \mp 0} = \pm 0,$$

für  $x \xrightarrow{>} 2$  gilt

$$f(x) = \frac{x}{(x-2) \cdot (x+2)} \rightarrow \frac{2}{\pm 0 \cdot 4} = \pm \infty, \text{ für } x \xrightarrow{>} -2 \text{ gilt } f(x) \rightarrow \pm \infty$$



$$4. f(x) = \frac{5x}{x^2 + 4}, D_f = \mathbb{R}$$

Nullstelle  $x_1 = 0$

Punktsymmetrie zum Ursprung,

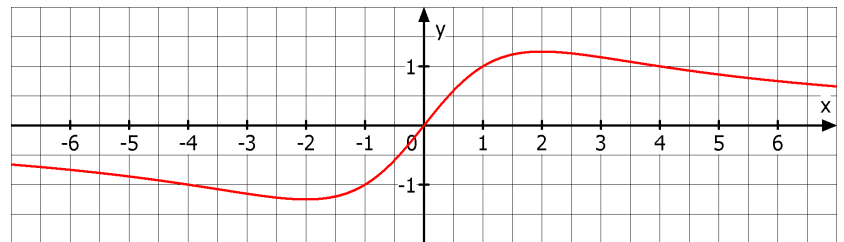
denn  $f(-x) = -f(x)$  ;

für  $x \rightarrow \pm\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow \pm 0$ ;

im Bereich  $x > 0$  muss ein HOP, im Bereich  $x < 0$  ein TIP liegen.

$f(x) = a \Leftrightarrow ax^2 - 5x + 4a = 0$  hat genau eine Lösung für  $D = 25 - 16a^2 = 0 \Leftrightarrow a_{1/2} = \pm 1,25$ .

Daher HOP( $x_1/1,25$ ) und aus  $f(x_1) = 1,25$  folgt  $x_1 = 2$ , also HOP(2 / 1,25) und TIP(-2 / -1,25).



$$5. f(x) = \frac{x^2 - 4}{5x};$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Nullstellen:  $x_{1/2} = \pm 2$

Punktsymmetrie zum Ursprung

wegen  $f(-x) = -f(x)$

für  $x \xrightarrow{>} 0$  gilt

$$f(x) \rightarrow \frac{\pm 0 - 4}{\pm 0} = \mp \infty$$

für  $x \rightarrow \pm\infty$  gilt

$$f(x) = \frac{x^2}{5x} - \frac{4}{5x} = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5x} \rightarrow \frac{1}{5}x - (\pm 0) = \frac{1}{5}x = 0,2x$$

D.h. der Graph von  $f$  schmiegt sich an die Gerade  $y = 0,2x$  an.

