

Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen

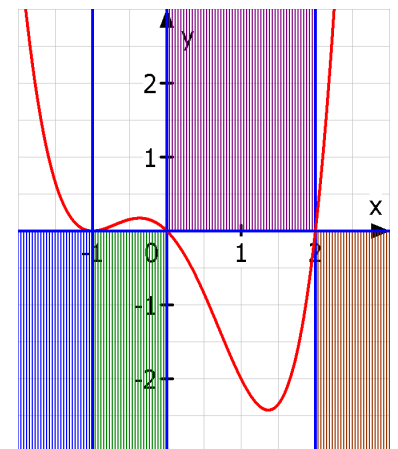
1. Eine ganzrationale Funktion vierten Grades hat bei $x_1 = -1$ eine doppelte und bei $x_2 = 0$ eine einfache Nullstelle. Der Graph der Funktion geht durch die Punkte $(1 / -4)$ und $(-2 / 14)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung. Warum kann die Funktion nicht achsensymmetrisch zur y-Achse sein? Geben Sie eine kurze Begründung!



2. Eine ganzrationale Funktion dritten Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung, hat bei $x_1 = 2$ eine Nullstelle und der Graph geht durch den Punkt $(-1 / 1,5)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung. Besitzt die Funktion weitere Nullstellen?
3. Eine ganzrationale Funktion fünften Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung, hat bei $x_1 = 2$ eine doppelte Nullstelle und der Graph geht durch den Punkt $(1 / 3)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung. Welche weiteren Nullstellen muss die Funktion haben?
4. Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades geht durch die Punkte $(1 / -4)$, $(-1 / 6)$, $(0 / 0)$ und $(-2 / 8)$. Bestimmen Sie alle Nullstellen dieser Funktion.
5. Eine ganzrationale Funktion vierten Grades ist achsensymmetrisch und hat bei $x_1 = 1$ eine Nullstelle. Der Graph geht durch die Punkte $(0 / 1,5)$ und $(2 / 1,5)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung und alle weiteren Nullstellen der Funktion.
6. Die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 0,2x^3 + bx^2 - x + 2$ soll bei $x_1 = 2$ eine Nullstelle besitzen. Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen der Funktion f .
7. Der Graph einer Funktion f kann schnell skizziert werden, wenn man alle Nullstellen von f kennt.
Beispiel: $f(x) = 0,5 \cdot (x - 2) \cdot x \cdot (x + 1)^2$
Zuerst erstellt man eine Tabelle der angegebenen Form, in der man die Vorzeichen der Faktoren von $f(x)$ und dann von $f(x)$ selbst notiert.

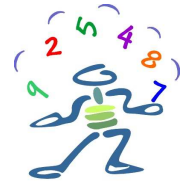
	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$(x + 1)^2$	> 0	$= 0$	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0
x	< 0	< 0	< 0	$= 0$	> 0	> 0	> 0
$(x - 2)$	< 0	< 0	< 0	< 0	< 0	$= 0$	> 0
$f(x)$	> 0	$= 0$	> 0	$= 0$	< 0	$= 0$	> 0

Dann kann man im x - y -Koordinatensystem Felder angeben, in denen der Graph von f nicht verlaufen kann. Eine Skizze des Graphen G_f ist nun möglich und auch das Grenzwertverhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow \pm \infty$ lässt sich einfach erkennen. Die genaue Lage von Hoch- bzw. Tiefpunkten des Graphen lassen sich natürlich nicht ermitteln!



Skizzieren Sie entsprechend den Graphen der Funktion g mit $g(x) = 0,1 \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)^2$. Überprüfen Sie mit einem Funktionsplotter Ihre Skizze.

Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen * Lösungen



1. Ansatz: $f(x) = (x+1)^2 \cdot x \cdot (ax+b)$

(1) $f(1) = -4 \Leftrightarrow -4 = 2^2 \cdot 1 \cdot (a+b) \Leftrightarrow a+b = -1 \Rightarrow b = -1-a$

(2) $f(-2) = 14 \Leftrightarrow 14 = (-1)^2 \cdot (-2) \cdot (-2a+b) \Leftrightarrow -2a+b = -7$

(1) in (2) $-2a-1-a = -7 \Leftrightarrow -3a = -6 \Leftrightarrow a = 2$ und $b = -1-2 = -3$

Also $f(x) = (x+1)^2 \cdot x \cdot (2x-3)$; f kann nicht achsensymmetrisch sein, weil f sonst auch noch eine doppelte Nullstelle bei $x_3 = 1$ haben müsste und damit insgesamt 5 Nullstellen hätte!

2. Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx$

(1) $f(2) = 0 \Leftrightarrow 0 = 8a + 2b \Leftrightarrow -b = 4a$

(2) $f(-1) = 1,5 \Leftrightarrow 1,5 = -a - b \xrightarrow{(1)} 1,5 = -a + 4a \Leftrightarrow a = 0,5$ und $b = -2$

Also $f(x) = 0,5x^3 - 2x$

3. Wegen der Symmetrie hat die Funktion auch bei $x_2 = -2$ eine doppelte Nullstelle, daher der

Ansatz: $f(x) = (x-2)^2 \cdot (x+2)^2 \cdot (ax+b)$

(1) $f(1) = 3 \Leftrightarrow (-1)^2 \cdot 3^2 \cdot (a+b) = 3 \Leftrightarrow 3a+3b = 1 \Rightarrow 3b = 1-3a$

(2) $f(-1) = -f(1) \Leftrightarrow (-3)^2 \cdot 1^2 \cdot (-a+b) = -3 \Leftrightarrow -3a+3b = -1$

(1) in (2) $-3a+1-3a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$ und $b = 0$ also $f(x) = \frac{1}{3}x \cdot (x-2)^2 \cdot (x+2)^2$

4. Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(1) $-4 = a+b+c+d$ (2) $6 = -a+b-c+d$

(3) $8 = -8a+4b-2c+d$ (4) $0 = d$

... $\Rightarrow b = 1$ und $a = 1$ und $c = -6$ also $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x+3) \cdot (x-2) = 0$

Nullstellen $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -3$

5. Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ und (1) $f(1) = 0$ und (2) $f(0) = 1,5$ und (3) $f(2) = 1,5$

(1) $0 = a+b+c$ (2) $1,5 = c$ (3) $1,5 = 16a+4b+c$

... $\Rightarrow b = -2$ und $a = 0,5$ also $f(x) = 0,5x^4 - 2x^2 + 1,5$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0,5 \cdot (x^4 - 4x^2 + 3) = 0,5 \cdot (x^2-3) \cdot (x^2-1)$

Nullstellen: $x_{1/2} = \pm 1$; $x_{3/4} = \pm \sqrt{3}$

6. Nullstelle bei $x_1 = 2$, d.h. $0 = 0,2 \cdot 8 + 4b - 2 + 2 \Rightarrow b = -0,4$

$f(x) = 0,2x^3 - 0,4x^2 - x + 2 = 0,2 \cdot (x^3 - 2x^2 - 5x + 10) = 0,2 \cdot (x^2 - 5) \cdot (x - 2)$ Polynomdivision!

Nullstellen von f : $x_1 = 2$; $x_{2/3} = \pm \sqrt{5}$

7.

	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$(x+3)$	< 0	$= 0$	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0
$(x-1)$	< 0	< 0	< 0	$= 0$	> 0	> 0	> 0
$(x-2)^2$	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0	$= 0$	> 0
$f(x)$	> 0	$= 0$	< 0	$= 0$	> 0	$= 0$	> 0

