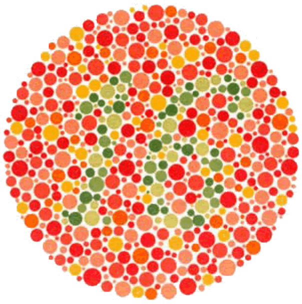
Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Bedingte Wahrscheinlichkeiten

1. Peter wirft zwei Würfel.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme größer als 9 ist?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Peter mindestens eine 6 erhält?
   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Peter mindestens eine 6 würfelte, wenn die Augensumme größer als 9 war?
   d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme größer als 9 ist, falls mindestens eine 6 gewürfelt wurde?

2. In einer Urne befinden sich 5 rote, 3 schwarze und 2 grüne Kugeln.
   Anna zieht 2 Kugeln ohne Zurücklegen.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht Anna zwei rote Kugeln?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht Anna zwei Kugeln unterschiedlicher Farbe?
   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht Anna eine rote und eine schwarze Kugel?
   d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Anna eine rote und eine schwarze Kugel gezogen, wenn sie zwei Kugeln unterschiedlicher Farbe hatte?
   e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Anna zwei Kugeln unterschiedlicher Farbe gezogen, wenn sie eine rote und eine schwarze Kugel hatte?
   f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Anna zwei Kugeln unterschiedlicher Farbe, wenn sie keine grüne Kugel gezogen hat?

3. Untersuchungen haben ergeben, dass in der BRD 8,0% der Männer und 0,60% der Frauen farbenblind (rot-grün-blind) sind.
   Berechnen Sie unter der Voraussetzung, dass 47,7% der Einwohner der BRD männlich sind, die Wahrscheinlichkeit für
   a) einen farbenblinden Mann   b) eine farbenblinde Frau
   c) eine farbenblinde Person
   in der BRD.



4. Ein Losverkäufer besitzt 100 Packungen zu je 100 Losen. 80 Packungen enthalten nur Nieten ("Nietenpackungen"), 18 Packungen enthalten je 80 Nieten und 20 Gewinnlose ("Mischpackungen") und 2 Packungen enthalten nur Gewinne ("Gewinnpackungen").
   a) Anton kauft ein Los; es ist eine Niete. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt das Los
      a1) aus einer "Nietenpackung",   a2) aus einer "Mischpackung",
      a3) aus einer "Gewinnpackung"?
   b) Berta kauft ein Los; es ist ein Gewinn. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt das Los
      b1) aus einer "Nietenpackung",   b2) aus einer "Mischpackung",
      b3) aus einer "Gewinnpackung"?

5) In der BRD waren 1975 0,5% der Bevölkerung aktiv an Tuberkulose (Tbc) erkrankt.
   Man weiß aufgrund langjähriger Erfahrung, dass ein spezieller Tbc-Röntgentest 90% der Kranken und 99% der Gesunden richtig diagnostiziert.
   a) Eine medizinische Diagnose kann in zweierlei Weise falsch sein:
      Der Patient hat die betreffende Krankheit, sie wird aber nicht erkannt.
      Der Patient ist gesund, wird aber für krank erklärt.
      Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten für jeden dieser beiden Fehler?

   b) Das Untersuchungsergebnis weist einen Getesteten als Tbc-krank aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er dann wirklich krank?
   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Untersuchter wirklich gesund, wenn er laut Untersuchungsbefund gesund ist?
   d) Die beiden in b) und c) getesteten Personen stammen aus einer Bevölkerungsschicht, die nur zu 0,05% aktiv an Tbc erkrankt ist. Welche Wahrscheinlichkeiten ergeben sich nun in den Fällen b) und c)?

Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Bedingte Wahrscheinlichkeiten * Lösungen

1. a) Augensumme größer 9, d.h. es passen von 36 möglichen Ergebnissen nur folgende: (6/6), (6/5), (5/6), (6/4), (4/6), (5/5)

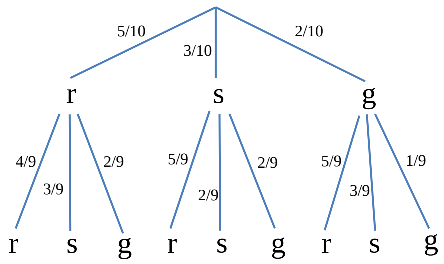
   

   also $P(\text{Augensumme} > 9) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\%$

   b) $P(\text{„mindestens eine 6“}) = \frac{1+2\cdot 5}{36} = \frac{11}{36} \approx 30{,}6\%$

   c) $P(\text{„mindestens eine 6, falls Augensumme} > 9\text{“}) = P_{AS>9}(\text{„mindestens eine 6“}) =$
   $\frac{P(\text{"AS > 9" und "mindestens eine 6"})}{P(\text{"AS>9"})} = \frac{5/36}{6/36} = \frac{5}{6} \approx 83{,}3\%$

   d) $P(\text{„Augensumme} > 9\text{, falls mindestens eine 6“}) = P_{\text{“mindestens eine 6“}}(\text{„AS>9“}) =$
   $\frac{P(\text{"mindestens eine 6" und "AS > 9"})}{P(\text{"mindestens eine 6"})} = \frac{5/36}{11/36} = \frac{5}{11} \approx 45{,}5\%$



2. a) $P(\text{„2 rote“}) = \frac{5\cdot 4}{10\cdot 9} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9} \approx 22{,}2\%$

   b) $P(\text{„unterschiedliche Farbe“}) =$
   $1 - \frac{5\cdot 4 + 3\cdot 2 + 2\cdot 1}{10\cdot 9} = \frac{62}{90} = \frac{31}{45} \approx 68{,}9\%$

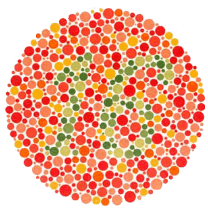
   c) $P(\text{„eine rote und eine schwarze“}) = \frac{5\cdot 3 + 3\cdot 5}{10\cdot 9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\%$

   d) $P_{\text{“unterschiedl. Farbe“}}(\text{„eine rote und eine schwarze“}) = \frac{30/90}{62/90} = \frac{30}{62} = \frac{15}{31} \approx 48{,}4\%$

   e) $P_{\text{“eine rote und eine schwarze“}}(\text{„ unterschiedl. Farbe“}) = \frac{30/90}{30/90} = 1 = 100\%$

   f) $P(\text{„keine grüne“}) = \frac{5\cdot 4 + 5\cdot 3}{10\cdot 9} + \frac{3\cdot 5 + 3\cdot 2}{10\cdot 9} = \frac{56}{90}$ und

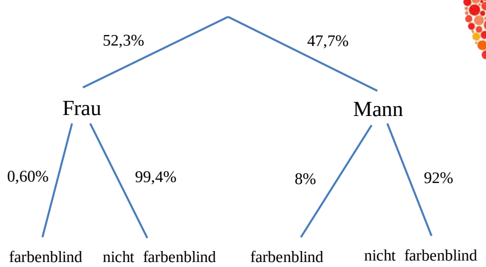
   $P_{\text{“keine grüne“}}(\text{„unterschiedl. Farbe“}) = \frac{(5\cdot 3 + 3\cdot 5)/90}{56/90} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28} \approx 53{,}6\%$



3. a) $P(\text{„farbenblinder Mann“}) =$
   $0{,}477 \cdot 0{,}08 = 0{,}03816 \approx 3{,}8\%$

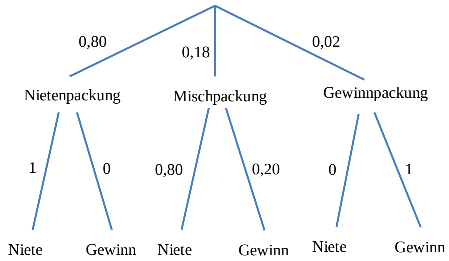
   b) $P(\text{„farbenblinde Frau“}) =$
   $0{,}523 \cdot 0{,}006 = 0{,}003138 \approx 0{,}3\%$

   c) $P(\text{„farbenblinde Person“}) =$
   $0{,}03816 + 0{,}003138 \approx 4{,}1\%$



4. a1) $$P_{\text{Niete}}(\text{Nietenpackung}) = \frac{0,8\cdot 1}{0,8\cdot 1+0,18\cdot 0,80} = \frac{0,8}{0,944} = \frac{50}{59} \approx 85\%$$

a2) $$P_{\text{Niete}}(\text{Mischpackung}) = \frac{0,18\cdot 0,80}{0,8\cdot 1+0,18\cdot 0,80} =$$
$$\frac{0,144}{0,944} = \frac{9}{59} \approx 15\%$$



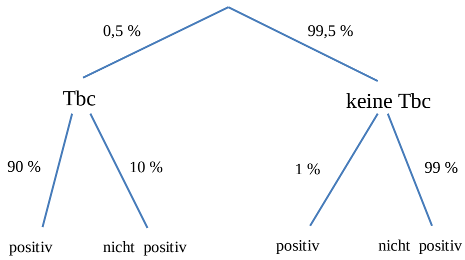
a3) $$P_{\text{Niete}}(\text{Gewinnpackung}) = 0\%$$

b1) $$P_{\text{Gewinn}}(\text{Nietenpackung}) = 0\%$$

b2) $$P_{\text{Gewinn}}(\text{Mischpackung}) = \frac{0,18\cdot 0,20}{0,18\cdot 0,20+0,02\cdot 1} = \frac{0,036}{0,056} = \frac{9}{14} \approx 64\%$$

b3) $$P_{\text{Gewinn}}(\text{Gewinnpackung}) = \frac{0,02\cdot 1}{0,18\cdot 0,20+0,02\cdot 1} = \frac{0,020}{0,056} = \frac{5}{14} \approx 36\%$$

5. a) $$P_{\text{Tbc}}(\text{nicht positiv}) = 10\%$$
$$P_{\text{nicht Tbc}}(\text{positiv}) = 1\%$$



b) $$P_{\text{positiv}}(\text{Tbc}) = \frac{0,005\cdot 0,90}{0,005\cdot 0,90+0,995\cdot 0,01} =$$
$$\frac{0,0045}{0,01445} \approx 31,1\%$$

c) $$P_{\text{nicht positiv}}(\text{nicht Tbc}) =$$
$$\frac{0,995\cdot 0,99}{0,005\cdot 0,10+0,995\cdot 0,99} = \frac{0,98505}{0,98555} \approx 99,95\%$$

d) $$P_{\text{positiv}}(\text{Tbc}) = \frac{0,0005\cdot 0,90}{0,0005\cdot 0,90+0,9995\cdot 0,01} = \frac{0,00045}{0,010445} \approx 4,3\%$$
$$P_{\text{nicht positiv}}(\text{nicht Tbc}) = \frac{0,9995\cdot 0,99}{0,0005\cdot 0,10+0,9995\cdot 0,99} = \frac{0,989505}{0,989555} \approx 99,995\%$$