

Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Näherungsweise Berechnung der Kreiszahl π

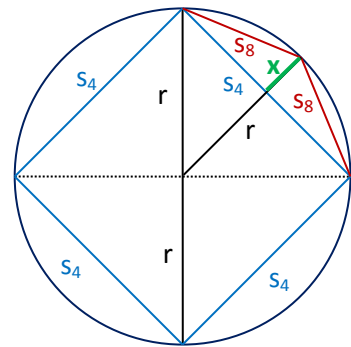
Einem Kreis mit Radius r wird ein regelmäßiges n -Ecke (Kantenlänge s_n und Umfang $u_n = n \cdot s_n$) einbeschrieben. Im Bild beginnt man z.B. mit $n = 4$.

Anschließend wird die Eckenzahl verdoppelt. Das neue $2n$ -Eck hat nun die Kantenlänge s_{2n} und den Umfang $u_{2n} = 2n \cdot s_{2n}$. Offensichtlich gilt: $u_n < u_{2n} < \text{Kreisumfang} = 2r\pi$.

Je öfter man die Seitenzahl verdoppelt, um so besser wird sich der Umfang des Vielecks dem Kreisumfang annähern. Damit erhält man eine Möglichkeit die Zahl π näherungsweise zu ermitteln.

Zwischen s_n , s_{2n} und r besteht der folgende Zusammenhang:

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - r \cdot \sqrt{4r^2 - s_n^2}}$$



Bestätigen Sie die folgende Begründung:

$$(1) \quad s_{2n}^2 = x^2 + (0,5 \cdot s_n)^2$$

$$(2) \quad r^2 = (r-x)^2 + (0,5 \cdot s_n)^2 \Rightarrow r-x = \sqrt{r^2 - (0,5 s_n)^2} \Rightarrow$$

$$x^2 = (r - \sqrt{r^2 - (0,5 s_n)^2})^2 = r^2 - 2r \cdot \sqrt{r^2 - (0,5 s_n)^2} + (r^2 - (0,5 s_n)^2) \Rightarrow$$

$$x^2 = 2r^2 - 2r \cdot \sqrt{r^2 - (0,5 s_n)^2} - (0,5 s_n)^2 \quad \text{liefert in (1) eingesetzt}$$

$$s_{2n}^2 = 2r^2 - 2r \cdot \sqrt{r^2 - (0,5 s_n)^2} = 2r^2 - r \cdot \sqrt{4r^2 - s_n^2}.$$

Wählt man nun den Radius $r = 1$, so folgt $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$ und für den Umfang gilt:

$$n \cdot s_n < 2n \cdot s_{2n} < 2 \cdot \pi \cdot r \quad \text{und mit } r = 1 \text{ damit } n \cdot s_{2n} < \pi \text{ d.h. } \pi > n \cdot s_{2n} = n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}},$$

wobei für sehr großes n immer besser die Näherung $\pi \approx n \cdot s_{2n} = n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$ gilt.

Aufgabe:

Berechnen Sie nun die Werte für $s_4, s_8, s_{16}, \dots, s_{1024}$ und auch die Werte $2 \cdot s_4, 4 \cdot s_8, \dots, 512 \cdot s_{1024}$.

Vergleichen Sie den Näherungswert $1024 \cdot s_{2048} = 1024 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{1024}^2}}$ für π

mit dem Taschenrechnerwert von $\pi = 3,1415926535 \dots$

Welcher Näherungswert ergibt sich für die Kreiszahl π , wenn man mit einem einbeschriebenen 6-Eck beginnt und bis zum 192-Eck weiterrechnet?

