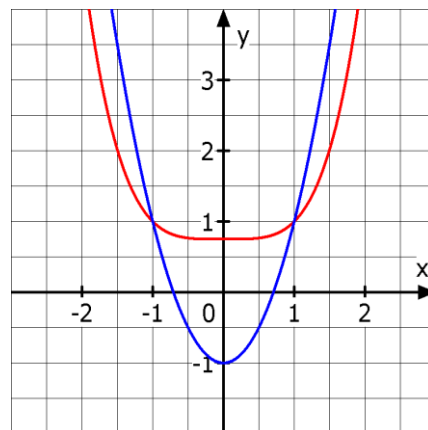


Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Schnittpunkte von Graphen

1. Das Bild zeigt die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = 0,25 \cdot x^4 + 0,75$ und $g(x) = 2x^2 - 1$.

- Wie viele Schnittpunkte können die beiden Graphen maximal haben
- Bestimmen Sie alle Schnittpunkte mit Hilfe einer geeigneten Polynomdivision.
- Bestimmen Sie alle Schnittpunkte mit Hilfe einer geeigneten Substitution.



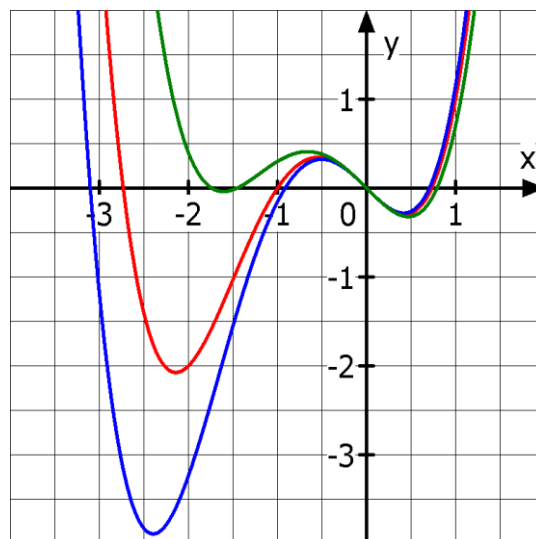
2. Das Bild zeigt drei Graphen der so genannten Funktionenschar

$$f_k(x) = \frac{1}{2} \cdot x^4 + k \cdot x^3 - x \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}.$$

Der rote Graph hat ersichtlich eine Nullstelle bei $x_1 = -1$.

Bestimmen Sie für den roten Graph den Wert des zugehörigen k .

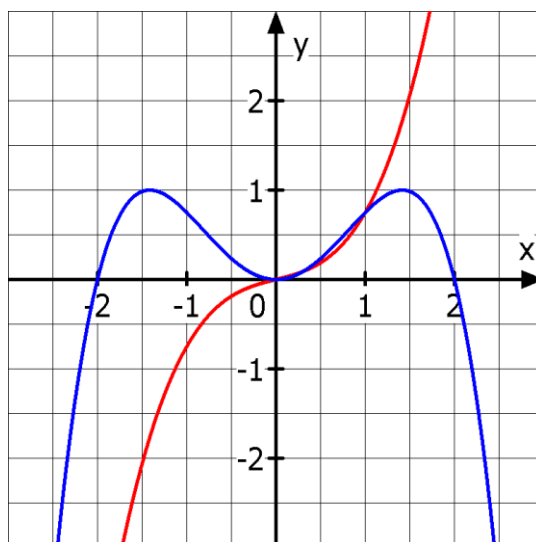
Berechnen Sie nun alle restlichen Nullstellen der Funktion mit dem roten Graphen.



3. Das Bild zeigt die Graphen der beiden Funktionen f und g mit

$$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^4 + x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{1}{4} \cdot x.$$

- Welche Funktion gehört zum roten Graphen? In wie vielen Schnittpunkten schneiden sich offensichtlich die beiden Graphen?
- Bestimmen Sie nun alle Schnittpunkte der beiden Graphen!



Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Schnittpunkte von Graphen * Lösungen

1. a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0,25 \cdot x^4 + 0,75 = 2x^2 - 1 \Leftrightarrow 0,25 \cdot x^4 - 2x^2 + 1,75 = 0$

Diese Gleichung kann maximal 4 Lösungen haben. Es gibt also maximal 4 Schnittpunkte.

b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0,25 \cdot x^4 - 2x^2 + 1,75 = 0$

Offensichtlich sind $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ Lösungen dieser Gleichung, weil sich die beiden Graphen in den Punkten $(-1/1)$ und $(1/1)$ schneiden.

$$(0,25 \cdot x^4 - 2x^2 + 1,75) : (x^2 - 1) = 0,25x^2 - 1,75$$

$$\text{Also } (0,25 \cdot x^4 - 2x^2 + 1,75) = (x^2 - 1) \cdot (0,25x^2 - 1,75) = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot \frac{1}{4} \cdot (x^2 - 7)$$

Die weiteren Schnittpunkte liegen also bei $x_{3/4} = \pm \sqrt{7}$.

Die vier Schnittpunkte lauten also $(-1/1)$, $(1/1)$, $(-\sqrt{7}/13)$ und $(\sqrt{7}/13)$.



c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0,25 \cdot x^4 - 2x^2 + 1,75 = 0$ Substitution $u = x^2$

$$0,25 \cdot u^2 - 2u + 1,75 = 0 \Leftrightarrow u^2 - 8u + 7 = 0 \Leftrightarrow (u - 1) \cdot (u - 7) = 0 \Leftrightarrow$$

$$u_1 = 1 \text{ und } u_2 = 7 \text{ also } x^2 = 1 \text{ bzw. } x^2 = 7 \text{ und daher } x_{1/2} = \pm 1; x_{3/4} = \pm \sqrt{7}$$

2. $f_k(-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (-1)^4 + k \cdot (-1)^3 - (-1) = 0 \Leftrightarrow k = -1,5$

$$\text{Nullstellen von } f_{1,5}(x): 0 = \frac{1}{2} \cdot x^4 + 1,5 \cdot x^3 - x \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (x^3 + 3x^3 - 2)$$

$$0 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (x^3 + 3x^3 - 2) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 2x - 2)$$

Die Nullstellen lauten damit $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_{3/4} = -1 \pm \sqrt{3}$



3. a) Der rote Graph gehört zu $g(x)$.

3 Schnittpunkte sind erkennbar (bei 0 und 1 und bei etwa 0,25), aber es gibt auch noch einen Schnittpunkt im Bereich $x < -2$.

b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \cdot x^4 + x^2 = \frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{1}{4} \cdot x \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot x^4 + \frac{1}{2} \cdot x^3 - x^2 + \frac{1}{4} \cdot x = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{4} \cdot x \cdot (x^3 + 2x^2 - 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot x \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 3x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 0; x_2 = 1; x_{3/4} = \frac{1}{2} \cdot (-3 \pm \sqrt{13}) \quad (x_3 \approx 0,30; x_4 \approx -3,30)$$

Schnittpunkte $(0/0)$; $(1/0,75)$; $\approx (0,30/0,17)$; $\approx (-3,30/-19,67)$

