Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Exponentialgleichungen (Blatt 2)

Beachte:
Eine Exponentialgleichung kann nicht durch Logarithmieren gelöst werden, wenn auf einer der beiden Seiten der Gleichung noch eine Summe oder Differenz steht.

$3+2^x = 3^x \Leftrightarrow \lg(3+2^x) = x\cdot\lg 3$ aber die linke Seite lässt sich nicht weiter vereinfachen!
Die Lösung dieser Gleichung kann man nicht exakt berechnen!

Trotzdem gibt es Gleichungen dieser Art, deren Lösung exakt berechnet werden kann.
Bei den Gleichungen der folgenden Aufgabe 1 muss man erst geschickt umformen! Z.B.

$3^{1+x} = 2\cdot 3^x + 9 \Leftrightarrow 3\cdot 3^x = 2\cdot 3^x + 9 \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow x=2$

$5\cdot 2^{2x} - 6 = 3\cdot 4^x \Leftrightarrow 5\cdot(2^2)^x - 6 = 3\cdot 4^x \Leftrightarrow 5\cdot 4^x - 3\cdot 4^x = 6 \Leftrightarrow 2\cdot 4^x = 6 \Leftrightarrow 4^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_4 3$

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen und geben Sie das Ergebnis auf zwei Dezimalstellen genau an.

a) $3\cdot 2^x = 5\cdot 2^{x+1} - 7$ b) $3^{x-1} + 2\cdot 3^{x+1} = 38$

c) $2\cdot 3^{x+4} = 9 - 4\cdot 3^{x+2}$ d) $4^{x-1} + 2\cdot 4^x = 2^{2x} + 20$

e) $2\cdot 9^{x+1} = 28 + 4\cdot 3^{2x}$ f) $2^{3x+2} = 3\cdot 8^x + 2^3$

Die folgenden Gleichungen lassen sich auf **quadratische Gleichungen** zurückführen.
Geben Sie die Lösungen auf zwei Dezimalstellen genau an. Beispiel:

$3^{2x} - 6 = 5\cdot 3^x \Leftrightarrow (3^x)^2 - 5\cdot(3^x) - 6 = 0$ Substitution $u=3^x$

$u^2 - 5\cdot u - 6 = 0 \Leftrightarrow u_{1/2} = \frac{1}{2}\cdot(5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 1\cdot(-6)}) = \frac{1}{2}\cdot(5 \pm \sqrt{49}) = \frac{1}{2}\cdot(5 \pm 7) \Leftrightarrow$

$u_1 = 6$; $(u_2 = -1)$; also $3^x = 6 \Leftrightarrow x = \log_3 6 \approx 1{,}63$ ($3^x = -1$ hat keine Lösung!)

2. a) $2^{2x} = 3\cdot 2^x + 4$ b) $12\cdot 3^x - 3^{2x} = 27$

c) $2^{2x} + 2 = 8{,}25\cdot 2^x$ d) $3^{2x} = 8\cdot 3^{x+1} + 81$

e) $4\cdot 2^{2x} + 31\cdot 2^x = 8$ f) $1000\cdot 10^{2x} = 1 - 90\cdot 10^x$

g) $0{,}5^{2x} = 32 + 4\cdot 0{,}5^x$ h) $0{,}5^{2x} - 0{,}5^{-3} = 0{,}5^{x-1}$

i) $10^x - 9 = \frac{10}{10^x}$ j) $2^x - 2^2 = \frac{1}{2^{x-5}}$

k) $3^x + 3^{2-x} = 10$ l) $0{,}5^x - 2^2 = 2\cdot 0{,}5^{-x-4}$

Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Exponentialgleichungen (Blatt 2) * Lösungen

1.

a) $3\cdot 2^x = 5\cdot 2^{x+1} - 7 \Leftrightarrow 7 = 5\cdot 2\cdot 2^x - 3\cdot 2^x \Leftrightarrow 7 = 7\cdot 2^x \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

b) $3^{x-1} + 2\cdot 3^{x+1} = 38 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\cdot 3^x + 2\cdot 3\cdot 3^x = 38 \Leftrightarrow 3^x + 18\cdot 3^x = 114 \Leftrightarrow 19\cdot 3^x = 114 \Leftrightarrow 3^x = 6 \Leftrightarrow$

$x = \log_3 6 \approx 1{,}63$

c) $2\cdot 3^{x+4} = 9 - 4\cdot 3^{x+2} \Leftrightarrow 2\cdot 81\cdot 3^x = 9 - 4\cdot 9\cdot 3^x \Leftrightarrow 198\cdot x^3 = 9 \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{22} \Leftrightarrow x = -\log_3 22 \approx -2{,}81$

d) $4^{x-1} + 2\cdot 4^x = 2^{2x} + 20 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\cdot 4^x + 2\cdot 4^x = 4^x + 20 \Leftrightarrow 1{,}25\cdot 4^x = 20 \Leftrightarrow 4^x = 16 \Leftrightarrow x = 2$

e) $2\cdot 9^{x+1} = 28 + 4\cdot 3^{2x} \Leftrightarrow 2\cdot 9\cdot 9^x = 28 + 4\cdot 9^x \Leftrightarrow 14\cdot 9^x = 28 \Leftrightarrow 9^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_9 2 \approx 0{,}32$

f) $2^{3x+2} = 3\cdot 8^x + 2^3 \Leftrightarrow 2^2\cdot (2^3)^x = 3\cdot 8^x + 8 \Leftrightarrow 4\cdot 8^x = 3\cdot 8^x + 8 \Leftrightarrow 8^x = 8 \Leftrightarrow x = 1$

2.

a) $2^{2x} = 3\cdot 2^x + 4$; mit $u = 2^x \Rightarrow u^2 - 3u - 4 = 0$; $(u_1 = -1),\ u_2 = 4$; $2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

b) $12\cdot 3^x - 3^{2x} = 27$; mit $u = 3^x \Rightarrow u^2 - 12u + 27 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 9$; $u_2 = 3$;

also $3^x = 9$, $x_1 = 2$; $3^x = 3$, $x_2 = 1$

c) $2^{2x} + 2 = 8{,}25\cdot 2^x$; mit $2^x = u \Rightarrow u^2 - 8{,}25u + 2 = 0$; $u_{1/2} = \frac{1}{2}\cdot(8{,}25 \pm \sqrt{8{,}25^2 - 4\cdot 2}) \Rightarrow$

$u_{1/2} = \frac{1}{2}\cdot(8{,}25 \pm 7{,}75)$; $u_1 = 8$, $u_2 = 0{,}25$; $2^x = 8 \Rightarrow x_1 = 3$; $2^x = 0{,}25 \Rightarrow x_2 = -2$

d) $3^{2x} = 8\cdot 3^{x+1} + 81$,mit $3^x = u \Rightarrow u^2 - 24u - 81 = 0$; $u_1 = 27$, $(u_2 = -6)$; $3^x = 27 \Rightarrow x = 3$

e) $4\cdot 2^{2x} + 31\cdot 2^x = 8$,mit $2^x = u \Rightarrow 4u^2 + 31u - 8 = 0$; $u_1 = 0{,}25$, $(u_2 = -8)$; $2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

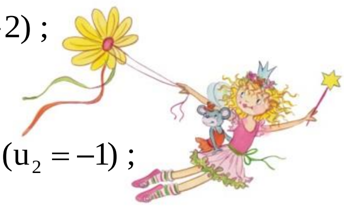
f) $1000\cdot 10^{2x} = 1 - 90\cdot 10^x$, mit $10^x = u \Rightarrow 1000u^2 + 90u - 1 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0{,}01$, $(u_2 = -0{,}1)$

$10^x = 0{,}01 \Rightarrow x = -2$

g) $0{,}5^{2x} = 32 + 4\cdot 0{,}5^x$ mit $0{,}5^x = u \Rightarrow u^2 - 4u - 32 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 8$,$(u_2 = -4)$; $0{,}5^x = 8 \Rightarrow x = -3$

h) $0{,}5^{2x} - 0{,}5^{-3} = 0{,}5^{x-1}$ mit $0{,}5^x = u \Rightarrow u^2 - 2u - 8 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 4$, $(u_2 = -2)$;

$0{,}5^x = 4 \Rightarrow x = -2$



i) $10^x - 9 = \frac{10}{10^x}$ mit $u = 10^x \Rightarrow u - 9 = \frac{10}{u} \Leftrightarrow u^2 - 9u - 10 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 10$,$(u_2 = -1)$;

$10^x = 10 \Rightarrow x = 1$

j) $2^x - 2^2 = \frac{1}{2^{x-5}}$ mit $2^x = u \Rightarrow u - 4 = \frac{32}{u} \Leftrightarrow u^2 - 4u - 32 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 8$, $(u_2 = -4)$

$2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

k) $3^x + 3^{2-x} = 10$ mit $u = 3^x \Rightarrow u + \frac{9}{u} - 10 = 0 \Leftrightarrow u^2 - 10u + 9 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 1$, $u_2 = 9$;

$3^x = 1 \Rightarrow x_1 = 0$; $3^x = 9 \Rightarrow x_2 = 2$

l) $0{,}5^x - 2^2 = 2\cdot 0{,}5^{-x-4}$ mit $u = 0{,}5^x \Rightarrow u - 4 = 2\cdot 16\cdot \frac{1}{u} \Leftrightarrow u^2 - 4u - 32 = 0$

$\Leftrightarrow u_1 = 8$, $(u_2 = -4)$; $0{,}5^x = 8 \Rightarrow x = -3$