2. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 10d * 03.03.2011 * Gruppe A

Bei allen Aufgaben ist ein ausführlicher, genauer Rechenweg anzugeben.

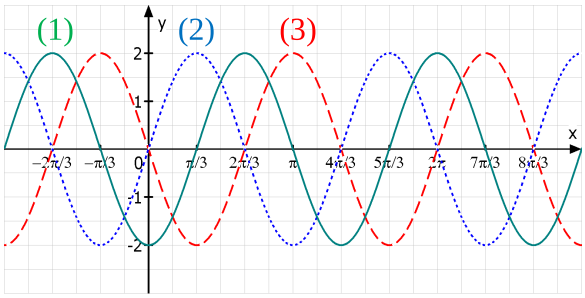
1. Bestimmen Sie <u>alle</u> Lösungen der Gleichung mit $x \in [0\,;\,2\pi]$.

   a) $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ b) $\cos(x) = \frac{1}{2}$

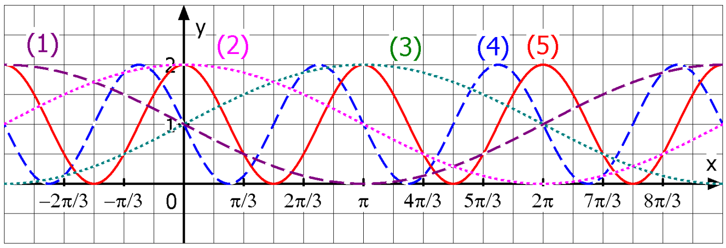
2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sin(1{,}5x - \pi)$ mit $x \in \mathbb{R}$.

   a) Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion f.

   b) Im Bild sind drei Funktionen dargestellt. Prüfen Sie, ob einer der drei Graphen zur Funktion f gehört!



3. Im Bild sind die Graphen von 5 Funktionen dargestellt. Prüfen Sie, ob die Graphen von $f(x) = 1 - \sin(2x)$, $g(x) = 1 + \cos(2x)$ und $h(x) = 1 + \sin(0{,}5x)$ abgebildet sind und ordnen Sie gegebenenfalls zu!



4. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung.

   a) $2^{0{,}5x} = 8 \cdot \sqrt{2}$ b) $\log_x 5 = 2$

   c) $2^{2x} - 14 \cdot 2^x = 32$

5. Die radioaktive Strahlung eines Präparats soll durch eine Bleischicht der Dicke d geschwächt werden. Pro 1,0 mm Bleischicht nimmt die Intensität der Strahlung um 4,8 % ab.

   a) Geben Sie einen Funktionsterm I(x) an, der die Intensität I der Strahlung nach dem Durchgang durch eine Bleischicht der Dicke x beschreibt. Berechnen Sie nun die Intensität der Strahlung nach dem Durchgang durch eine 1,0cm breite Bleiplatte.

   b) Wie dick müsste eine Bleiplatte sein, um 95% der Strahlung zu absorbieren?

Aufgabe	1a	b	2a	b	3	4a	b	c	5a	b	Summe
Punkte	3	3	4	2	3	3	2	4	4	4	32

Gutes Gelingen! G.R.

2. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 10d * 03.03.2011 * Gruppe B

Bei allen Aufgaben ist ein ausführlicher, genauer Rechenweg anzugeben.

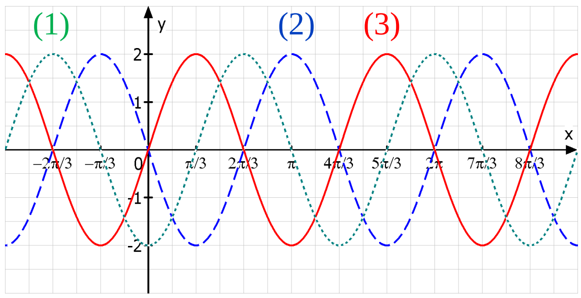
1. Bestimmen Sie <u>alle</u> Lösungen der Gleichung mit $x \in [0\,;\,2\pi]$.

   a) $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ b) $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

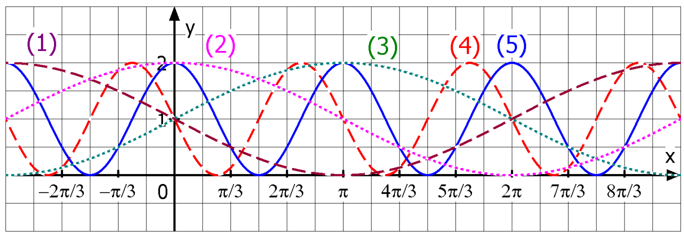
2. Gegeben ist die Funktion f mit
   $f(x) = 2 \cdot \sin(1{,}5x + \pi)$ mit $x \in \mathbb{R}$.

   a) Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion f.

   b) Im Bild sind drei Funktionen dargestellt.
   Prüfen Sie, ob einer der drei Graphen zur
   Funktion f gehört!



3. Im Bild sind die Graphen von 5 Funktionen dargestellt. Prüfen Sie, ob die Graphen von $f(x) = 1 + \sin(0{,}5x)$, $g(x) = 1 - \sin(2x)$ und $h(x) = 1 + \cos(2x)$ abgebildet sind und ordnen Sie gegebenenfalls zu!



4. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung.

   a) $3^{0{,}5x} = 9 \cdot \sqrt{3}$ b) $\log_x 3 = 2$

   c) $2^{2x} - 31 \cdot 2^x = 32$

5. Die radioaktive Strahlung eines Präparats soll durch eine Aluschicht der Dicke d geschwächt werden. Pro 1,0 mm Aluschicht nimmt die Intensität der Strahlung um 1,2 % ab.

   a) Geben Sie einen Funktionsterm I(x) an, der die Intensität I der Strahlung nach dem Durchgang durch eine Aluschicht der Dicke x beschreibt. Berechnen Sie nun die Intensität der Strahlung nach dem Durchgang durch eine 1,0cm breite Aluplatte.

   b) Wie dick müsste eine Aluplatte sein, um 95% der Strahlung zu absorbieren?

Aufgabe	1a	b	2a	b	3	4a	b	c	5a	b	Summe
Punkte	3	3	4	2	3	3	2	4	4	4	32

Gutes Gelingen! G.R.

2. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 10d * 03.03.2011 * Lösung * Gruppe A

1. a) $\sin(\varphi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\varphi_1 = 360^o - 60^o = 300^o$ und $\varphi_2 = 180^o + 60^o = 240^o$ also

$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \Leftrightarrow x_1 = 2\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$; $x_2 = \pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$

b) $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$, $\varphi_1 = 60^o$, $\varphi_2 = 360^o - 60^o = 300^o$ also

$\cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{3}\pi$; $x_2 = 2\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$.

2. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cdot\sin(1,5x - \pi) = 0 \Leftrightarrow 1,5x - \pi = k\cdot\pi$ mit $k \in Z \Leftrightarrow$.

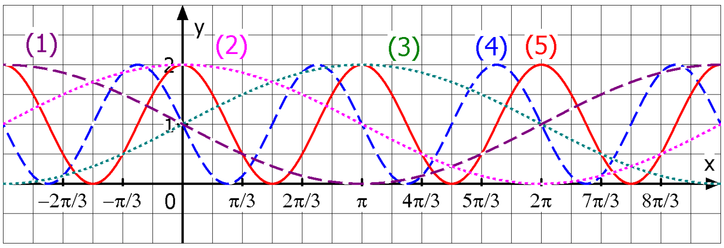
$1,5x = k\cdot\pi + \pi \Leftrightarrow x_k = \frac{(k+1)\cdot\pi}{1,5} \Leftrightarrow x_k = \frac{2\cdot(k+1)\cdot\pi}{3}$ mit $k \in Z$

$(\ldots ,\ x_{-2} = -\frac{2}{3}\pi ,\ x_{-1} = 0 ,\ x_0 = \frac{2}{3}\pi ,\ x_1 = \frac{4}{3}\pi , \ldots)$

b) Von den Nullstellen her können der blaue (2) und der rote (3) Graph passen.

$f(\frac{1}{3}\pi) = 2\cdot\sin(1,5\cdot\frac{1}{3}\pi - \pi) = 2\cdot\sin(-\frac{1}{2}\pi) = -2$, also passt der rote Graph (3).

3. Im Bild sind die Graphen von 5 Funktionen dargestellt. Prüfen Sie, ob die Graphen von $f(x) = 1 - \sin(2x)$, $g(x) = 1 + \cos(2x)$ und $h(x) = 1 + \sin(0,5x)$ abgebildet sind und ordnen Sie gegebenenfalls zu!



f und g haben die Periodenlänge π, h dagegen hat die Periodenlänge 4π.
Der blaue Graph (4) gehört zur Funktion f , der rote Graph (5) gehört zur Funktion g und der grüne Graph (3) gehört zur Funktion h.

4 a) $2^{0,5x} = 8\cdot\sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{0,5x} = 2^{3,5} \Leftrightarrow 0,5x = 3,5 \Leftrightarrow x = 7$

b) $\log_x 5 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{5}$

c) $2^{2x} - 14\cdot 2^x = 32$ Substitution $u = 2^x$ also $u^2 - 14u - 32 = 0 \Leftrightarrow$

$(u-16)\cdot(u+2) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 16$, $(u_2 = -2)$ also $2^x = 16 \Leftrightarrow x = 4$

5. a) $I(x) = I_o\cdot(1 - 0,048)^{\frac{x}{1,0mm}}$ also $I(x) = I_o\cdot 0,952^{\frac{x}{1,0mm}}$

$I(1,0cm) = I_o\cdot 0,952^{\frac{10mm}{1,0mm}} = I_o\cdot 0,952^{10} = I_o\cdot 0,611\ldots \approx 61\%$ von I_o .

b) $I(x_1) = 0,05\cdot I_o \Leftrightarrow 0,05\cdot I_o = I_o\cdot 0,952^{\frac{x_1}{1,0mm}} \Leftrightarrow 0,05 = 0,952^{\frac{x_1}{1,0mm}} \Leftrightarrow$

$\frac{x_1}{1,0mm} = \log_{0,952} 0,05 \Leftrightarrow x_1 = 1,0mm\cdot\frac{\lg 0,05}{\lg 0,952} = 60,90\ldots mm \approx 6,1cm$

2. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 10d * 03.03.2011 * Lösung * Gruppe B

1. a) $\sin(\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\varphi_1 = 60^\circ$ und $\varphi_2 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ also

$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{3}\pi$; $x_2 = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$

b) $\cos(\varphi) = -\frac{1}{2}$, $\varphi_1 = 120^\circ$ $(= 180^\circ - 60^\circ)$, $\varphi_2 = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$ also

$\cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{2}{3}\pi$; $x_2 = \pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$.

2. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cdot\sin(1{,}5x + \pi) = 0 \Leftrightarrow 1{,}5x + \pi = k\cdot\pi$ mit $k \in Z \Leftrightarrow$.

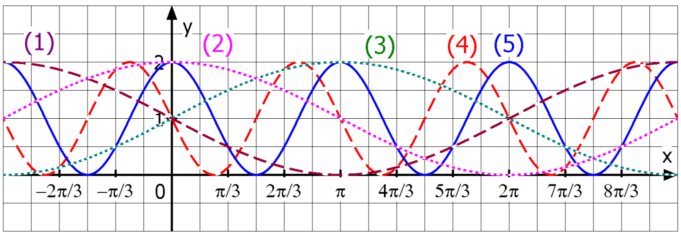
$1{,}5x = k\cdot\pi - \pi \Leftrightarrow x_k = \frac{(k-1)\cdot\pi}{1{,}5} \Leftrightarrow x_k = \frac{2\cdot(k-1)\cdot\pi}{3}$ mit $k \in Z$

$(\ldots , x_0 = -\frac{2}{3}\pi , x_1 = 0 , x_2 = \frac{2}{3}\pi , x_3 = \frac{4}{3}\pi , \ldots)$

b) Von den Nullstellen her können der blaue (2) und der rote (3) Graph passen.

$f(\frac{1}{3}\pi) = 2\cdot\sin(1{,}5\cdot\frac{1}{3}\pi + \pi) = 2\cdot\sin(\frac{3}{2}\pi) = -2$, also passt der blaue Graph (2).

3. Im Bild sind die Graphen von 5 Funktionen dargestellt. Prüfen Sie, ob die Graphen von $f(x) = 1 + \sin(0{,}5x)$, $g(x) = 1 - \sin(2x)$ und $h(x) = 1 + \cos(2x)$ abgebildet sind und ordnen Sie gegebenenfalls zu!



g und h haben die Periodenlänge π, f dagegen hat die Periodenlänge 4π.
Der grüne Graph (3) gehört zur Funktion f , der rote Graph (4) gehört zur Funktion g und der blaue Graph (5) gehört zur Funktion h.

4. a) $3^{0{,}5x} = 9\cdot\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^{0{,}5x} = 3^{2{,}5} \Leftrightarrow 0{,}5x = 2{,}5 \Leftrightarrow x = 5$

b) $\log_x 3 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$

c) $2^{2x} - 31\cdot 2^x = 32$ Substitution $u = 2^x$ also $u^2 - 31u - 32 = 0 \Leftrightarrow$

$(u-32)\cdot(u+1) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 32$, $(u_2 = -1)$ also $2^x = 32 \Leftrightarrow x = 5$

5. a) $I(x) = I_o\cdot(1 - 0{,}012)^{\frac{x}{1{,}0\text{mm}}}$ also $I(x) = I_o\cdot 0{,}988^{\frac{x}{1{,}0\text{mm}}}$

$I(1{,}0\text{cm}) = I_o\cdot 0{,}988^{\frac{10\text{mm}}{1{,}0\text{mm}}} = I_o\cdot 0{,}952^{10} = I_o\cdot 0{,}886\ldots \approx 89\%$ von I_o .

b) $I(x_1) = 0{,}05\cdot I_o \Leftrightarrow 0{,}05\cdot I_o = I_o\cdot 0{,}988^{\frac{x_1}{1{,}0\text{mm}}} \Leftrightarrow 0{,}05 = 0{,}988^{\frac{x_1}{1{,}0\text{mm}}} \Leftrightarrow$

$\frac{x_1}{1{,}0\text{mm}} = \log_{0{,}988} 0{,}05 \Leftrightarrow x_1 = 1{,}0\text{mm}\cdot\frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}988} = 248{,}1\ldots\text{mm} \approx 0{,}25\text{m}$