

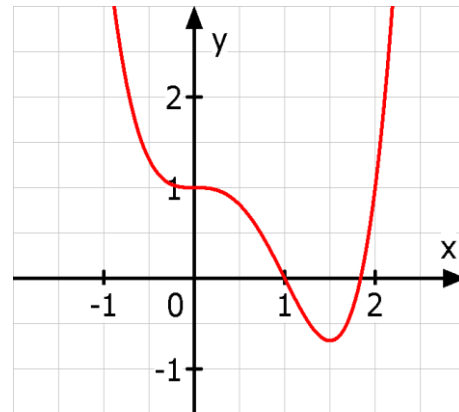
## Q12 \* Mathematik \* Wendepunkte und Art der Extrema



1. Das Bild zeigt den Graphen der Funktionen

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1.$$

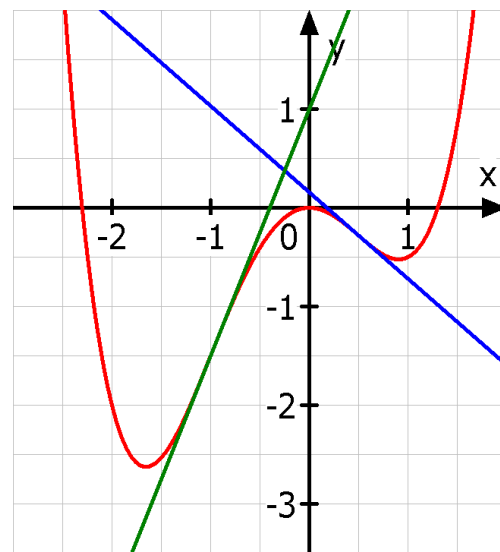
- In welchen Intervallen ist der Graph von  $f$  linksgekrümmt? Bestätigen Sie das durch geeignete Rechnung!
- Bestimmen Sie alle Hoch-, Tief- und Wendepunkte rechnerisch!
- Die waagrechte Wendetangente schließt mit dem Graphen von  $f$  eine Fläche mit dem Inhalt  $A$  ein. Berechnen Sie  $A$ .



2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^4 + x^3 - 3x^2)$$

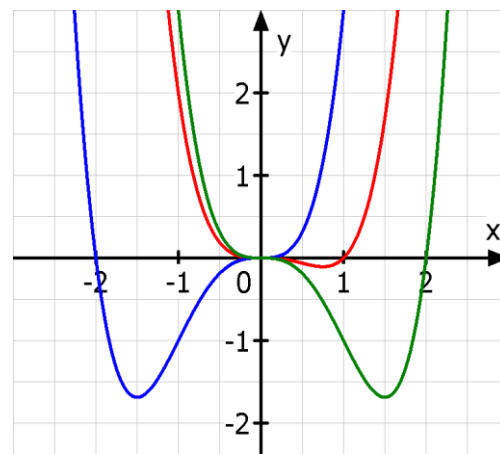
- Bestimmen Sie alle Nullstellen, und berechnen Sie alle Hoch-, Tief- und Wendepunkte.
- Bestimmen Sie die Gleichung der beiden (eingezeichneten) Wendetangenten.
- Der Graph von  $f$  und die beiden Wendetangenten schließen eine Fläche mit dem Inhalt  $A$  ein. Berechnen Sie  $A$ .



3. Das Bild zeigt drei Graphen der Funktionenschar

$$f_k(x) = x^4 + k \cdot x^3 \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}.$$

- Bestimmen Sie alle Nullstellen von  $f_k$ .
- Bestimmen Sie alle Hoch-, Tief- und Wendepunkte in Abhängigkeit von  $k$ .
- Geben Sie zu den drei abgebildeten Graphen die zugehörigen Werte für  $k$  an.
- Bestimmen Sie die Gleichungen der Wendetangenten in Abhängigkeit von  $k$ .
- Zeigen Sie, dass die Graphen von  $f_k$  und  $f_{-k}$  zueinander achsensymmetrisch liegen.
- Peter behauptet: Es gibt ein  $k \in \mathbb{R}$ , so dass sich die Wendetangenten der Graphen von  $f_k$  und  $f_{-k}$  rechtwinklig schneiden. Prüfen Sie Peters Behauptung.



## Q12 \* Mathematik \* Wendepunkte und Art der Extrema

1. a)  $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 6x^2$  und  $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 ; x_2 = 1 \text{ und } f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]0 ; 1[$$

$$G_f \text{ ist linkgekrümmt} \Leftrightarrow f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus ]0 ; 1[$$

b) waagrechte Tangenten:  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(2x-3) = 0$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 ; x_2 = 1,5 \text{ und } y_1 = 1; y_2 = -11/16$$

$f''(0) = 0$  also keine Aussage über Art des Extremums möglich.

$f'(x) = 2x^2(2x-3)$  ändert an der Stelle  $x_1 = 0$  das Vorzeichen nicht, d.h. es liegt an der Stelle  $x_1 = 0$  ein Terrassenpunkt TP(0/1) vor.

Bei  $x_2 = 1,5$  ändert  $f'(x)$  das Vorzeichen (von - auf +), d.h. es liegt ein Tiefpunkt vor.

Dies bestätigt auch die Ableitung von  $f$ , denn es gilt  $f''(1,5) = 9 > 0$ .

c) Die beiden Wendepunkte sind (0/1) und (1/0); WP(0/1) ist Terrassenpunkt.

Die waagrechte Wendetangente lautet also  $y = 1$ .

Schnittpunkt von waagrechter Wendetangente und Graph von  $f$ :  $f(x) = 1$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ oder } x_3 = 2$$

$$A = \int_0^2 1 - f(x) dx = \int_0^2 -x^4 + 2x^3 dx = \left[ -\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} \right]_0^2 = -\frac{32}{5} + 8 = 1,6$$



2. a)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \cdot (x^2 + x - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ oder } x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$x_{1/2} = 0 ; x_{3/4} = \frac{1}{2} \cdot \left( -1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)} \right) = \frac{1}{2} \cdot (-1 \pm \sqrt{13}) ; \text{ also } x_3 \approx -2,3 \text{ und } x_4 \approx 1,3$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (4x^3 + 3x^2 - 6x) \text{ und } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \cdot (4x^2 + 3x - 6) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ oder}$$

$$4x^2 + 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ oder } x_{5/6} = \frac{1}{8} \cdot \left( -3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 4 \cdot (-6)} \right) = \frac{1}{8} \cdot (-3 \pm \sqrt{105})$$

$$x_5 \approx 0,91 \text{ und } x_6 \approx -1,66$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot (12x^2 + 6x - 6) = 3 \cdot (2x^2 + x - 1) , \text{ also}$$

$$f''(x_5) \approx 4,7 > 0 ; \text{ also } \text{TIP}_1(x_5/y_5) \approx \text{TIP}_1(0,91 / -0,52) \text{ und}$$

$$f''(x_6) \approx +8,55 > 0 ; \text{ also } \text{TIP}_2(x_6/y_6) \approx \text{TIP}_2(-1,66 / -2,62)$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot (12x^2 + 6x - 6) = 3 \cdot (2x^2 + x - 1) \text{ und } f''(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_{7/8} = \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot (-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}) = \frac{1}{4} \cdot (-1 \pm 3) , \text{ d.h. } x_7 = 0,5 \text{ und } x_8 = -1$$

Da  $f''(x)$  an den Stellen  $x_7$  und  $x_8$  das Vorzeichen wechselt, liegen bei  $x_7$  und  $x_8$

Wendestellen vor.  $\text{WP}_1\left(\frac{1}{2} / -\frac{9}{32}\right)$  und  $\text{WP}_2(-1 / -1,5)$

b)  $f'(0,5) = -\frac{7}{8} = m_1$  ; blaue Wendetangente:  $y = -\frac{7}{8}x + t_1$   $\text{WP}_1$  eingesetzt liefert

$$-\frac{9}{32} = -\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} + t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{5}{32} \text{ also } y = -\frac{7}{8}x + \frac{5}{32} \text{ für die blaue Wendetangente;}$$

$f'(-1) = 2,5 = m_2$  ; grüne Wendetangente:  $y = 2,5x + t_2$  WP<sub>2</sub> eingesetzt liefert  
 $-1,5 = 2,5 \cdot (-1) + t_2 \Rightarrow t_2 = 1$  also  $y = 2,5x + 1$  für die grüne Wendetangente;

c) Schnittpunkt S der Wendetangenten:

$$-\frac{7}{8}x + \frac{5}{32} = \frac{5}{2}x + 1 \Rightarrow \frac{27}{8}x = -\frac{27}{32} \Rightarrow x_s = -\frac{1}{4} \quad (\text{und } y_s = \frac{3}{8})$$

$$A = \int_{-1}^{x_s} 2,5x + 1 - \frac{1}{2} \cdot (x^4 + x^3 - 3x^2) dx + \int_{x_s}^{0,5} -\frac{7}{8}x + \frac{5}{32} - \frac{1}{2} \cdot (x^4 + x^3 - 3x^2) dx =$$

$$\left[ \frac{5x^2}{4} + x - \frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{2} \right]_{-1}^{-\frac{1}{4}} + \left[ -\frac{7x^2}{16} + \frac{5x}{32} - \frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{2} \right]_{-\frac{1}{4}}^{+\frac{1}{2}} =$$

$$-\frac{461}{2560} - \left(-\frac{11}{40}\right) + \frac{13}{640} - \left(-\frac{191}{2560}\right) = \frac{243}{2560} + \frac{243}{2560} = \frac{243}{1280} \approx 0,19$$

3. a)  $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow x^3(x+k) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$  (dreifache NSt.) ;  $x_2 = -k$

b)  $f_k'(x) = 4x^3 + 3k \cdot x^2 = x^2 \cdot (4x + 3k)$  ;  $f_k''(x) = 12x^2 + 6k \cdot x = 6x \cdot (2x + k)$

Extrema:  $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (4x + 3k) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$  ;  $x_3 = -\frac{3k}{4}$  und  $y_1 = 0$  ;  $y_3 = -\frac{27}{256}k^4$

Beachte: Bei  $x_1$  ändert  $f_k'(x)$  das Vorzeichen nicht! Dort liegt damit kein Hoch- bzw.

Tiefpunkt (sondern ein Terrassenpunkt).

$$f_k''(x_3) = f_k''\left(-\frac{3k}{4}\right) = 12 \cdot \frac{9k^2}{16} - \frac{6k \cdot 3k}{4} = \frac{9}{4}k^2 > 0 \quad \text{also Tiefpunkt } \left(-\frac{3k}{4} / -\frac{27}{256}k^4\right)$$

Wendepunkte:  $f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x \cdot (2x + k) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$  ;  $x_4 = -\frac{k}{2}$  und  $y_4 = -\frac{k^4}{16}$

Da  $f''(x)$  bei  $x_1$  und auch bei  $x_4$  das Vorzeichen wechselt, hat der Graph

die Wendepunkte  $(0/0)$  und  $\left(-\frac{k}{2} / -\frac{k^4}{16}\right)$

c) Blauer Graph:  $k = 2$  ; grüner Graph:  $k = -2$  ; roter Graph:  $k = -1$

d) Die Wendetangente durch  $(0/0)$  hat die Gleichung  $y = 0$  (das ist die x-Achse)

$$\text{Wendetangente durch } \left(-\frac{k}{2} / -\frac{k^4}{16}\right) : \quad m = f_k'\left(-\frac{k}{2}\right) = 4\left(-\frac{k^3}{8}\right) + 3k \cdot \frac{k^2}{4} = \frac{k^3}{4}$$

Wendetangente  $y = \frac{k^3}{4}x + t$  ;  $\left(-\frac{k}{2} / -\frac{k^4}{16}\right)$  eingesetzt liefert

$$-\frac{k^4}{16} = \frac{k^3}{4} \cdot \left(-\frac{k}{2}\right) + t \Rightarrow t = \frac{k^4}{16} \quad ; \quad \text{also Wendetangente } y = \frac{k^3}{4}x + \frac{k^4}{16}$$

e)  $f_{-k}(x) = x^4 - k \cdot x^3$  und  $f_k(-x) = (-x)^4 + k \cdot (-x)^3 = x^4 - k \cdot x^3 = f_{-k}(x)$

Wegen  $f_k(-x) = f_{-k}(x)$  liegen die Graphen von  $f_k$  und  $f_{-k}$  zueinander achsensymmetrisch.

f) Da rechtwinkliges Schneiden mit der x-Achse nicht möglich ist, kann Peter nur die beiden

$$\text{Wendetangenten } y = \frac{k^3}{4}x + \frac{k^4}{16} \quad (\text{für } k) \quad \text{und} \quad y = \frac{(-k)^3}{4}x + \frac{(-k)^4}{16} = -\frac{k^3}{4}x + \frac{k^4}{16} \quad (\text{für } -k)$$

meinen. Sollen diese beiden Wendetangenten zueinander senkrecht stehen, dann muss gelten:

$$m_k \cdot m_{-k} = -1 \quad \text{also} \quad \frac{k^3}{4} \cdot \left(-\frac{k^3}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow k^6 = 16 \Leftrightarrow k_{1/2} = \pm \sqrt[6]{16} = \pm \sqrt[3]{4} \approx \pm 1,59$$