

Q12 * Mathematik * Aufgaben zu Kurvenscharen

Bestimmen Sie bei den angegebenen Kurvenscharen jeweils alle Nullstellen, Hoch-, Tief-, Terrassen- und Wendepunkte in Abhängigkeit von k .

1. $f_k(x) = x^3 + kx^2 \quad k \in \mathbb{R}$

Auf welcher Kurve liegen die Hoch-, Tief-, bzw. Wendepunkte der Schar?

2. $f_k(x) = x^3 + kx^2 + x \quad k \in \mathbb{R}_o^+$

Auf welcher Kurve liegen alle Wendepunkte der Schar?

3. $f_k(x) = \frac{kx}{k+x^2} \quad k \in \mathbb{R}^+$

Auf welcher Kurve liegen die Hoch- bzw. Tiefpunkte der Schar?



Lösungen

1. Nullstellen: $x_{1/2} = 0$; $x_3 = -k$ für $k=0$ Terrassenpunkt TP(0/0)

für $k > 0$: $TIP(0/0)$; $HOP(-\frac{2k}{3} / \frac{4k^3}{27})$

Kurve der HOP: $y = -\frac{1}{2}x^3$ mit $x \in \mathbb{R}^-$

für $k < 0$: $TIP(-\frac{2k}{3} / \frac{4k^3}{27})$; $HOP(0/0)$

Kurve der TIP: $y = -\frac{1}{2}x^3$ mit $x \in \mathbb{R}^+$

für alle k : Wendepunkt $WP(-\frac{k}{3} / \frac{2k^3}{27})$

Kurve der WP: $y = -2x^3$ mit $x \in \mathbb{R}$



2. für $0 \leq k < 2$ gibt es genau eine NSt. $x_1 = 0$;

für $k = 2$ gibt es zwei NSt. $x_1 = 0$; $x_2 = -1$

für $k > 2$ gibt es drei NSt. $x_1 = 0$; $x_{2/3} = \frac{1}{2}(-k \pm \sqrt{k^2 - 4})$

für $k > \sqrt{3}$ gibt es HOP($\frac{1}{3}(-k - \sqrt{k^2 - 3} / \dots)$) und TIP($\frac{1}{3}(-k + \sqrt{k^2 - 3} / \dots)$)

für $k = \sqrt{3}$ gibt es Terrassenpunkt TP($-\frac{\sqrt{3}}{3} / -\frac{\sqrt{3}}{9}$)

für alle $k \in \mathbb{R}_o^+$ Wendepunkt $WP(-\frac{k}{3} / \frac{2k^3}{27} - \frac{k}{3})$

Kurve der WP: $y = -2x^3 + x$ mit $x \in \mathbb{R}_o^-$

3. Nullstellen: $x_1 = 0$

Hochpunkte: $HOP(\sqrt{k} / \frac{\sqrt{k}}{2})$; Kurve der Hochpunkte: $y = \frac{1}{2}x$ mit $x \in \mathbb{R}^+$

Tiefpunkte: $TIP(-\sqrt{k} / -\frac{\sqrt{k}}{2})$; Kurve der Hochpunkte: $y = \frac{1}{2}x$ mit $x \in \mathbb{R}^-$