Q12 * Mathematik m6 * Klausur am 17.02.2014

1. Beim Wurf zweier Würfel wird die Zufallsgröße $X =$ „Produkt der Augenzahlen“ festgelegt.
   Bestimmen Sie $P(X \leq 4)$.

2. In einer Mensa werden täglich für 200 Betriebsangehörige Mittagessen zubereitet.
   Freitags können die 200 Gäste zwischen einer Mehlspeise und einem Fischgericht wählen.
   Erfahrungsgemäß entscheiden sich etwa 45% für die Mehlspeise und 55% für das Fischgericht.
   Der Chefkoch lässt daher 100 Mehlspeisen und 125 Fischgerichte zubereiten.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit reicht die Anzahl der Mehlspeisen?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit reicht die Anzahl der Fischgerichte nicht?

3. Anton und Berta vereinbaren folgendes Spiel.
   Anton wirft 6 Münzen. Wenn die Anzahl der Münzen mit „Wappen“ größer als die mit „Kopf“ ist, dann erhält er von Berta 1,50 €. Andernfalls muss Anton an Berta 1,00 € zahlen.
   a) Lohnt es sich für Anton, dieses Spiel mit Berta sehr oft zu wiederholen?
      Begründen Sie Ihre Antwort mit geeigneter Rechnung.
   b) Wie oft muss Anton das Spiel mindestens wiederholen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens einmal den Geldbetrag von 1,50 € erhält?

4. Im Rinderbestand eines Landes sind durchschnittlich 2% der Tiere mit dem Erreger einer Krankheit K infiziert. Nachdem diese Krankheit aber verstärkt aufzutreten scheint, vermuten Tierärzte, dass die Infizierungsrate auf über 4% angestiegen ist.
   In einer Studie soll diese Vermutung an 200 Rindern getestet werden.
   a) Entwerfen Sie einen Signifikanztest mit dem Signifikanzniveau von 5% und bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.
   b) Bei diesem Test erweisen sich 13 Rinder als infiziert.
      Sehen die Tierärzte ihre Vermutung durch den Test bestätigt?

5. Im $\mathbb{R}^3$ legen die Punkte $P(2/-4/7)$, $Q(3/-2/7)$ und $R(6/1/4)$ die Ebene E und die Punkte $A(1/2/3)$ und $B(-2/5/4)$ die Gerade $g = AB$ fest.
   a) Bestimmen Sie eine Normalenform der Ebene E.
      [mögliches Ergebnis $E: \; 2x_1 - x_2 + x_3 - 15 = 0$]
   b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden g mit der Ebene E.
   c) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes A von der Ebene E.

Aufgabe	1	2a	b	3a	b	4a	b	5a	b	c	Summe
Punkte	3	2	2	4	4	5	1	4	3	4	32

Gutes Gelingen! G.R.

Q12 * Mathematik m6 * Klausur am 17.02.2014 * Lösung

1. $P(X \le 4) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$, denn 4 ist größer als $1 \cdot 1$; $1 \cdot 2$; $2 \cdot 1$; $1 \cdot 3$; $3 \cdot 1$; $1 \cdot 4$; $4 \cdot 1$ und $2 \cdot 2$.

2. a) $P(\text{"100 Mehlspeisen reichen"}) = P_{0,45}^{200}(X \le 100) = 0,93192 \approx 93,2\%$

   b) $P(\text{"125 Fischgerichte reichen nicht"}) = P_{0,55}^{200}(X > 125) = 1 - P_{0,55}^{200}(X \le 125) =$

   $1 - 0,98666 \approx 1,3\%$

3. a) $p_1 = P(\text{"Mehr Wappen als Kopf"}) = P_{0,5}^{6}(X > 3) = 1 - P_{0,5}^{6}(X \le 3) =$

   $1 - 0,65625 = 0,34375 \ \ (= P_{0,5}^{6}(X \le 2))$

   Antons Gewinnerwartung pro Spiel beträgt

   $-1,00€ \cdot 0,65625 + 1,50€ \cdot 0,34375 = -0,140625€ \approx -0,14€$

   Es lohnt sich für Anton also nicht, das Spiel öfter zu spielen, weil er dann mit sehr großer Wahrscheinlichkeit insgesamt verliert.

   b) P(„Anton gewinnt mindestens einmal“) $\ge 99\% \Leftrightarrow 1 - P(\text{"Anton gewinnt nie"}) \ge 99\% \Leftrightarrow$

   $1 - 0,65625^n \ge 0,99 \Leftrightarrow 0,65625^n \le 0,01 \Leftrightarrow \log 0,65625^n \le \log 0,01 \Leftrightarrow$

   $n \cdot \log 0,65625 \le \log 0,01 \Leftrightarrow n \ge \frac{\log 0,01}{\log 0,65625} = 10,9...$ also $n \ge 11$

   Anton muss also mindestens 11 mal das Spiel wiederholen.

4. a) $H_o: \ p \le 4\%$; $A = \{0, 1, ..., k\}$ und $\overline{A} = \{k+1, ..., 200\}$

   $P_{p \le 4\%}^{200}(x \in \overline{A}) \le 5\%$ gilt falls $P_{p=4\%}^{200}(x \in \overline{A}) \le 5\% \Leftrightarrow$

   $P_{4\%}^{200}(X \ge k+1) \le 5\% \Leftrightarrow 1 - P_{4\%}^{200}(X \le k) \le 0,05 \Leftrightarrow P_{4\%}^{200}(X \le k) \ge 0,95 \Leftrightarrow k \ge 13$

   also $\overline{A} = \{14, 15, ..., 200\}$

   b) Die Tierärzte können bei diesem Signifikanzniveau ihre Vermutung nicht bestätigt sehen, denn die Anzahl von 13 infizierten Rindern liegt nicht im Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

5. a) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -6-0 \\ 0+3 \\ 5-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Wähle als Normalenvektor von E nun $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; also E: $(\vec{X} - \vec{R}) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

   E: $2x_1 - x_2 + x_3 - (2 \cdot 6 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4) = 0 \Leftrightarrow$ E: $2x_1 - x_2 + x_3 - 15 = 0$

b) $g = AB:\quad \vec{X} = \vec{A} + r\cdot\overrightarrow{AB}$ also $g:\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}$

$g\cap E:\quad 2\cdot(1-3r) - 1\cdot(2+3r) + 1\cdot(3+r) - 15 = 0 \Leftrightarrow -8r - 12 = 0 \Leftrightarrow r = -1{,}5$

$\vec{S} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + (-1{,}5)\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5{,}5\\-2{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}$ also $S(5{,}5/-2{,}5/1{,}5)$

c) Die Gerade durch A mit dem Normalenvektor von E schneidet E im Fußpunkt F. Der Abstand des Punktes A von der Ebene E entspricht genau der Länge von [AF].

$h:\quad \vec{X} = \vec{A} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ und $h\cap E:\quad 2\cdot(1+2t) - 1\cdot(2-t) + 1\cdot(3+t) - 15 = 0 \Leftrightarrow$

$6t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ und $F(5/0/5)$

Abstand $d(A;E) = \overline{AF} = \left| 2\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2} = 2\cdot\sqrt{6}$