

Q 12 * Mathematik * Aufgaben zur Integralrechnung

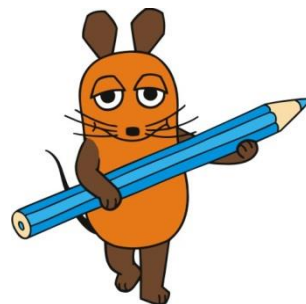
1. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

a) $\int_0^4 x^2 + 2x \, dx$

b) $\int_1^2 5 - \frac{2}{x^2} \, dx$

c) $\int_0^3 \sqrt{x} \, dx$

d) $\int_1^2 (x^2 + 1) \cdot \sqrt{x} \, dx$



2. Bestimmen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das die Graphen von f und g miteinander einschließen.

a) $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$ und $g(x) = -\frac{5}{3} \cdot x$

c) $f(x) = x \cdot (x-3)^2$ und $g(x) = x$

3. Bestimmen Sie den Wert von k so, dass die Gleichung erfüllt ist. Deuten Sie das Ergebnis jeweils geometrisch!

a) $\int_{-k}^k 1 - x^2 \, dx = 0$

b) $\int_{-k}^k x^3 - x \, dx = 0$

4. Zum Tüfteln

Berechnen Sie das bestimmte Integral. Denken Sie dabei an den HDI.

a) $\int_0^3 \sqrt{2x+3} \, dx$

b) $\int_0^3 6x \cdot \sqrt{x^2+3} \, dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(2x - \pi) \, dx$

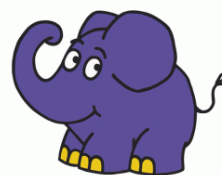
d) $\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{4x+1}} \, dx$

e) $\int_0^1 2x \cdot e^{x^2-1} \, dx$

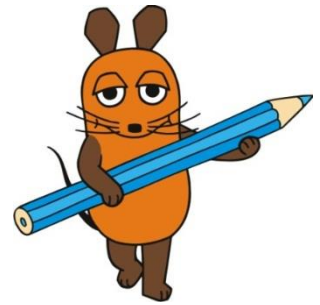
f) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2 \cdot \sqrt{x}} \, dx$

g) $\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1} \, dx$

h) $\int_1^2 \frac{5x}{x^2+1} \, dx$



Q 12 * Mathematik * Aufgaben zur Integralrechnung * Lösungen



1. a)
$$\int_0^4 x^2 + 2x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^4 = \frac{64}{3} + 16 - 0 = \frac{112}{3} = 37\frac{1}{3}$$

b)
$$\int_1^2 5 - \frac{2}{x^2} \, dx = \left[5x + \frac{2}{x} \right]_1^2 = \left(10 + \frac{2}{2} \right) - \left(5 + 2 \right) = 4$$

c)
$$\int_0^3 \sqrt{x} \, dx = \left[\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{27} - 0 = 2 \cdot \sqrt{3}$$

d)
$$\int_1^2 (x^2 + 1) \cdot \sqrt{x} \, dx = \int_1^2 x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \, dx = \left[\frac{2}{7} \cdot x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 =$$

$$\left(\frac{16\sqrt{2}}{7} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \right) - \left(\frac{2}{7} + \frac{2}{3} \right) = \frac{76\sqrt{2} - 20}{21}$$

2. a) Schnittpunkte der beiden Graphen: $S_1(-1 / 0)$ und $S_2(2 / 3)$

$$A = \int_{-1}^2 g(x) - f(x) \, dx = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = 4,5$$

b) Schnittpunkte der beiden Graphen: $S_1(-2 / \frac{10}{3})$, $S_2(0 / 0)$ und $S_3(2 / -\frac{10}{3})$

Wegen der Punktsymmetrie beider Graphen bezüglich des Ursprungs gilt:

$$A = 2 \cdot \int_0^2 g(x) - f(x) \, dx = 2 \cdot \left[\frac{2x^2}{3} - \frac{x^4}{12} \right]_0^2 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

c) Schnittpunkte der beiden Graphen: $S_1(0 / 0)$, $S_2(2 / 2)$ und $S_3(4 / 4)$

$$A = \int_0^2 f(x) - g(x) \, dx + \int_2^4 g(x) - f(x) \, dx = \int_0^2 x^3 - 6x^2 + 8x \, dx + \int_2^4 -x^3 + 6x^2 - 8x \, dx =$$

$$\int_0^2 x^3 - 6x^2 + 8x \, dx + \int_2^4 -x^3 + 6x^2 - 8x \, dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 4x^2 \right]_2^4 =$$

$$(4 - 0) + (0 - (-4)) = 8$$

3. a)
$$\int_{-k}^k 1 - x^2 \, dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-k}^k = \frac{2k \cdot (3 - k^2)}{3} \quad \text{d.h.}$$

$$\int_{-k}^k 1 - x^2 \, dx = 0 \Leftrightarrow \frac{2k \cdot (3 - k^2)}{3} = 0 \Leftrightarrow k_1 = 0 \quad \text{oder} \quad k_{2/3} = \pm\sqrt{3}$$

b)
$$\int_{-k}^k x^3 - x \, dx = 0$$
 gilt für jedes $k \in \mathbb{R}$, denn der Graph von $f(x) = x^3 - x$ ist

punktsymmetrisch. Die Rechnung zeigt dies ebenfalls:

$$\int_{-k}^k x^3 - x \, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-k}^k = \frac{k^4}{4} - \frac{k^2}{2} - \left(\frac{(-k)^4}{4} - \frac{(-k)^2}{2} \right) = 0 \quad \text{gilt für jedes } k.$$

4. Alle Stammfunktionen findet man durch Probieren!

$$\text{a) } \int_0^3 \sqrt{2x+3} \, dx = \left[\frac{1}{3} \cdot (2x+3)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = 9 - \sqrt{3}$$

$$\text{b) } \int_0^3 6x \cdot \sqrt{x^2+3} \, dx = \left[2 \cdot (x^2+3)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = 2 \cdot 12 \cdot \sqrt{12} - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 42 \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(2x-\pi) \, dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot \cos(2x-\pi) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \cdot (-1) \right) = -\frac{3}{4}$$

$$\text{d) } \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{4x+1}} \, dx = \left[\frac{3}{2} \cdot (4x+1)^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{5} - \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{5} - \frac{3}{2}$$

$$\text{e) } \int_0^1 2x \cdot e^{x^2-1} \, dx = \left[e^{x^2-1} \right]_0^1 = e^{1-1} - e^{0-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

$$\text{f) } \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2 \cdot \sqrt{x}} \, dx = \left[e^{\sqrt{x}} \right]_1^4 = e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}} = e^2 - e$$

$$\text{g) } \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1} \, dx = \left[\ln(|x^2+1|) \right]_0^2 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5$$

$$\text{h) } \int_1^2 \frac{5x}{x^2+1} \, dx = \left[\frac{5}{2} \cdot \ln(|x^2+1|) \right]_1^2 = \frac{5}{2} \cdot (\ln 5 - \ln 2) = \frac{5}{2} \cdot \ln \frac{5}{2}$$

