Q12 * Mathematik * Hausaufgaben vom 05.03.2018

S. 139/4a

$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\end{pmatrix}$; $\vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3\\-5-1\\-3+5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

$E_2: 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 12 = 0 \qquad \vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \parallel \vec{n}_{E_1}$

Also $E_1 \parallel E_2$ $\qquad (4/1/1) \in E_1$ in E_2:

$2\cdot4 - 3\cdot1 + 1\cdot1 - 12 = -6 \neq 0$

Also $(4/1/1) \notin E_2 \Rightarrow E_1 \parallel E_2$ und $E_1 \neq E_2$

4b) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$; $\vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\5\\-1\end{pmatrix}$

$E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right]\circ\begin{pmatrix}7\\-5\\1\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 7x_1 - 5x_2 + x_3 - (14+5+2) = 0$

(1) $E_1: 7x_1 - 5x_2 + x_3 - 21 = 0$

$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix}$

$E_2: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\right]\circ\begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -5x_1 + x_2 + x_3 - (-15+1-1) = 0$

(2) $E_2: 5x_1 - x_2 - x_3 - 15 = 0$

$E_1 \cap E_2 = g$ $\qquad$ aus (2) $x_3 = 5x_1 - x_2 - 15$ in (1)

(1') $7x_1 - 5x_2 + 5x_1 - x_2 - 15 - 21 = 0 \Leftrightarrow$

$12x_1 - 6x_2 = 36 \Leftrightarrow 2x_1 - x_2 = 6$

$P_1 \in g$ mit $P_1(a/b/c)$ und $a = 0 \Rightarrow b = -6 \Rightarrow c = 0-(-6)-15$, $c = -9$

also $P_1(0/-6/-9)$

$P_2 \in g$ mit $P_2(d/e/f)$ $\qquad d = 3 \Rightarrow e = 0 \Rightarrow f = 5\cdot3 - 0 - 15 = 0$

also $P_2(3/0/0)$ und

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \tau^*\cdot\begin{pmatrix}3-0\\0+6\\0+9\end{pmatrix} \qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

S. 139/4c

$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}$

$E_2: 2x_1 - 0{,}5x_2 + 1{,}5x_3 - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$4x_1 - x_2 + 3x_3 - 24 = 0 \qquad \vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_1 \nparallel E_2$

$g = E_1 \cap E_2$ $\qquad$ Setze E_1 in E_2 ein:

$4\cdot(4+\lambda-3\mu) - (-2+2\lambda) + 3\cdot(2+2\lambda+4\mu) - 24 = 0 \Leftrightarrow$

$16 + 4\lambda - 12\mu + 2 - 2\lambda + 6 + 6\lambda + 12\mu - 24 = 0 \Leftrightarrow$

$8\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}$

(hätte man auch an $\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} = \vec{n}_{E_2}$ erkennen können!)

S. 139/6a) Gesucht: Ebene F mit $F \parallel E$ und $P(3/4/-1) \in F$

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{n}_E = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \vec{n}_F$

$F: [\vec{x} - \vec{P}]\circ\vec{n}_F = 0 \Leftrightarrow \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$x_1 - x_2 + x_3 - (3-4-1) = 0 \qquad F: x_1 - x_2 + x_3 + 2 = 0$

gesucht: Ebene G mit $G \perp E$ und $P(3/4/-1) \in G$

Es gibt unendlich viele Lösungen für G

$\vec{n}_G \perp \vec{n}_E = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\qquad$ z.B. $\vec{n}_G = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Also $G: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}\right]\circ\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 7 = 0$

139/7 Schnittpunkt von E_1, E_2 und E_3 :

(1) $E_1 :\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 2x_2 - x_3 + 2}$ in (2) und (3)

(2) $E_2 :\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4 = 0$

(3) $E_3 :\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3 = 0$

(2') $(4x_2 - 2x_3 + 4) + x_2 - x_3 + 4 = 0 \Leftrightarrow 5x_2 - 3x_3 + 8 = 0$

(3') $2x_2 - x_3 + 2 - 2x_2 - 2x_3 - 3 = 0 \Leftrightarrow -3x_3 = 1 \Leftrightarrow x_3 = -\frac{1}{3}$ in (2')

(2') $5x_2 = 3x_3 - 8 \Rightarrow 5x_2 = -9 \Rightarrow x_2 = -1{,}8$ in (1)

$x_1 = 2x_2 - x_3 + 2 = -3{,}6 + \frac{1}{3} + 2 = -\frac{19}{15}$

$S\left(-\frac{19}{15} / -\frac{9}{5} / -\frac{1}{3}\right)$

Die Lösung des LGS ist hier einfacher als der Weg

$g = E_1 \cap E_2$ und $g \cap E_3 = \{S\}$!

S. 139/9

Ebene E_1 festgelegt durch $A(5/0/4)$, $B(3/0/0)$, $C(5/4/0)$

" E_2 " " $D(5/5/3)$, $E(5/1/5)$, $F(3/5/5)$

gesucht $g = E_1 \cap E_2$

$E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$

Also $E_1:\ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\right]\circ\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x_1 - x_2 - x_3 - 6 = 0$

$E_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\1\\5\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix}$

$E_2:\ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}5\\1\\5\end{pmatrix}\right]\circ\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 21 = 0$

$g = E_1 \cap E_2$ aus E_1: $x_2 = 2x_1 - x_3 - 6$ in E_2 :

(2') $2x_1 + 2x_1 - x_3 - 6 + 2x_3 - 21 = 0 \Rightarrow 4x_1 + x_3 = 27$

wähle z.B. $x_1 = 3 \Rightarrow x_3 = 27 - 12 = 15$; $x_2 = 2\cdot 3 - 15 - 6 = -15$

$P_1(3/-15/15)$

wähle z.B. $x_1 = 6 \Rightarrow x_3 = 27 - 24 = 3$; $x_2 = 2\cdot 6 - 3 - 6 = 3$

$P_2(6/3/3)$

$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix}6-3\\3+15\\3-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\18\\-12\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\6\\-4\end{pmatrix}$

$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\3\\3\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}1\\6\\-4\end{pmatrix}$