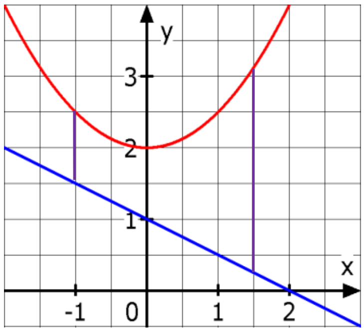
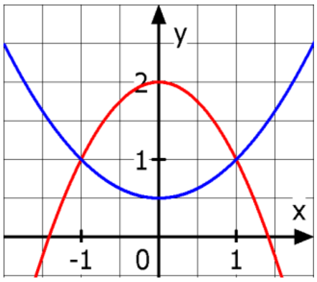
Q12 * Mathematik * Flächenberechnungen

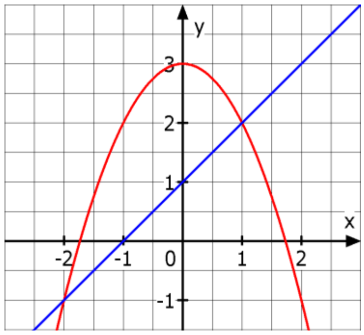
1. Das Bild zeigt die Graphen der beiden Funktionen $f(x) = 0,5x^2 + 2$ und $g(x) = -0,5x + 1$.
   Man erkennt: $f(x) > g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
   Berechnen Sie den Inhalt A der Fläche zwischen den beiden Graphen und den Grenzen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1,5$. Schraffieren Sie im Bild diese Fläche!
   Begründen Sie, dass gilt $A = \int_{-1}^{1,5} f(x) - g(x)\, dx$.



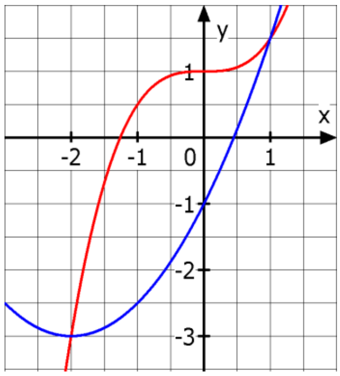
2. Die Graphen der Funktionen $f(x) = 2 - x^2$ und $g(x) = 0,5x^2 + 0,5$ schließen eine Fläche mit dem Inhalt A ein.
   Schraffieren Sie diese Fläche und berechnen Sie A.
   Begründen Sie, dass gilt $A = \int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\, dx$.



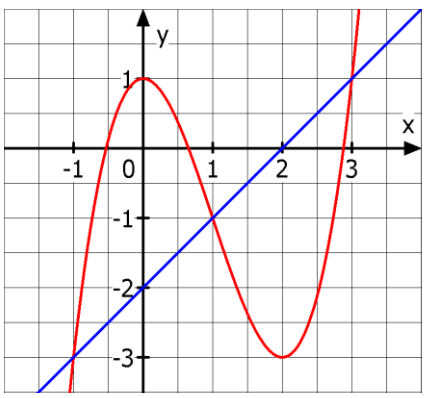
3. Die abgebildete Parabel und Gerade schließen eine Fläche mit dem Inhalt A ein. Schraffieren Sie diese Fläche!
   Bestimmen Sie die Funktionsterme von f und g und die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 der Graphen.
   Geben Sie A als bestimmtes Integral an und berechnen Sie dann A.



4. Die Parabel mit dem Scheitel S(-2/-3) und der Graph der Funktion f mit $f(x) = 1 + 0,5 \cdot x^3$ schließen eine Fläche mit dem Inhalt A ein.
   Bestimmen Sie den zur Parabel gehörenden Funktionsterm und alle Schnittpunkte.
   Wie kann man A als bestimmtes Integral schreiben? Berechnen Sie nun A.



5. Die beiden abgebildeten Graphen schneiden sich in drei Punkten, die jeweils ganzzahlige Koordinaten besitzen. Zum „roten Graph" gehört eine Funktion dritten Grades mit dem Hochpunkt HOP(0/1) und dem Tiefpunkt TIP(2/-3).
   Bestimmen Sie die jeweiligen Funktionsterme und die Schnittpunkte der Graphen.
   Wie kann man den gesamten Inhalt A der von den beiden Graphen eingeschlossenen Fläche mit bestimmten Integralen angeben? Berechnen Sie nun A!



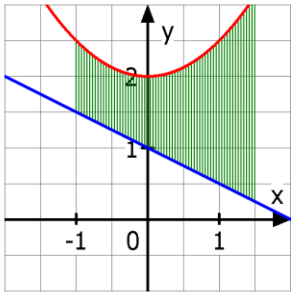
Q12 * Mathematik * Flächenberechnungen * Lösungen

1. $A = \int\limits_{-1}^{1,5} f(x)\,dx - \int\limits_{-1}^{1,5} g(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1,5} f(x) - g(x)\,dx$ gilt wegen der Linearität des Integrals.

$$A = \int\limits_{-1}^{1,5} f(x) - g(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1,5} 0,5x^2 + 2 - (-0,5x + 1)\,dx = \int\limits_{-1}^{1,5} 0,5x^2 + 0,5x + 1\,dx =$$

$$\int\limits_{-1}^{1,5} 0,5x^2 + 0,5x + 1\,dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} + x\right]_{-1}^{1,5} =$$

$$\frac{9}{16} + \frac{9}{16} + \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - 1\right) = \frac{21}{8} - (-\frac{11}{12}) = \frac{85}{24} \approx 3,54$$

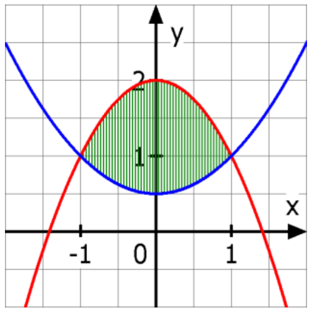


2. Schnittpunkte:

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; 2 - x^2 = 0,5x^2 + 0,5 \;\Leftrightarrow\; 1,5x^2 = 1,5 \;\Leftrightarrow\; x_{1/2} = \pm 1$$

$$A = \int\limits_{-1}^{1} f(x) - g(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} 2 - x^2 - (0,5x^2 + 0,5)\,dx =$$

$$\int\limits_{-1}^{1} 1,5 - 1,5x^2\,dx = \left[1,5x - \frac{x^3}{2}\right]_{-1}^{1} = 1,5 - 0,5 - (-1,5 + 0,5) = 2$$



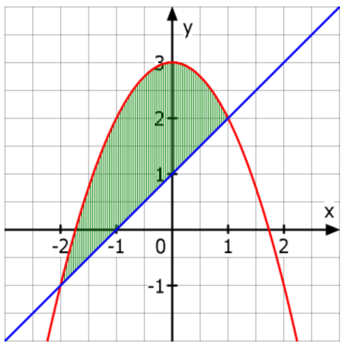
3. $f(x) = 3 - x^2$ und $g(x) = x + 1$; Schnittpunkte: $f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; 3 - x^2 = x + 1 \;\Leftrightarrow$

$$x^2 + x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)\cdot(x+2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = -2\,;\, x_2 = 1$$

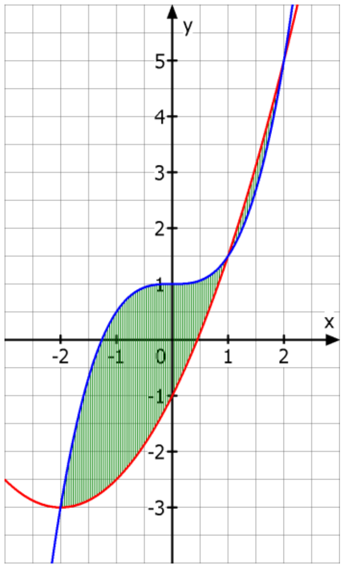
$$A = \int\limits_{-2}^{1} f(x) - g(x)\,dx = \int\limits_{-2}^{1} 3 - x^2 - (x+1)\,dx =$$

$$\int\limits_{-2}^{1} -x^2 - x + 2\,dx = \int\limits_{-2}^{1} -x^2 - x + 2\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} =$$

$$-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - (\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4) = \frac{9}{2} = 4,5$$



4. $g(x) = 0{,}5\cdot(x+2)^2 - 3 = 0{,}5x^2 + 2x - 1$



Schnittpunkte: $g(x) = f(x) \Leftrightarrow 0{,}5x^2 + 2x - 1 = 1 + 0{,}5x^3 \Leftrightarrow$

$0{,}5x^3 - 0{,}5x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

Ersichtliche Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$ also

$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-2) = 0$

Es gibt also noch einen dritten Schnittpunkt $S_3(2/5)$!

$$A = \int_{-2}^{1} g(x) - f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x) - g(x)\,dx =$$

$$\int_{-2}^{1} 1 + 0{,}5x^3 - 0{,}5x^2 - 2x + 1\,dx + \int_{1}^{2} 0{,}5x^2 + 2x - 1 - 1 - 0{,}5x^3\,dx =$$

$$\int_{-2}^{1} 0{,}5x^3 - 0{,}5x^2 - 2x + 2\,dx + \int_{1}^{2} -0{,}5x^3 + 0{,}5x^2 + 2x - 2\,dx =$$

$$\left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} - x^2 + 2x\right]_{-2}^{1} + \left[-\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{6} + x^2 - 2x\right]_{1}^{2} =$$

$$\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6} - 1 + 2\right) - \left(2 + \frac{8}{6} - 4 - 4\right) + \left(-2 + \frac{8}{6} + 4 - 4\right) - \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{6} + 1 - 2\right) = \frac{45}{8} + \frac{7}{24} = \frac{71}{12} \approx 5{,}92$$

5. Die Schnittpunkte lauten (-1/-3), (1/-1) und (3/1).

Einsetzen der Punkte (0/1), (-1/-3), (1/-1) und (3/1) in $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ liefert $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Gerade: $g(x) = x - 2$

$$A = \int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\,dx + \int_{1}^{3} g(x) - f(x)\,dx =$$

$$\int_{-1}^{1} x^3 - 3x^2 + 1 - x + 2\,dx + \int_{1}^{3} x^3 - 3x^2 + 1 - x + 2\,dx =$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1} + \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x\right]_{1}^{3} =$$

$$\left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right) - \left(\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} - 3\right) + \left(-\frac{81}{4} + 27 + \frac{9}{2} - 9\right) - \left(-\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} - 3\right) = 4 + 4 = 8$$