

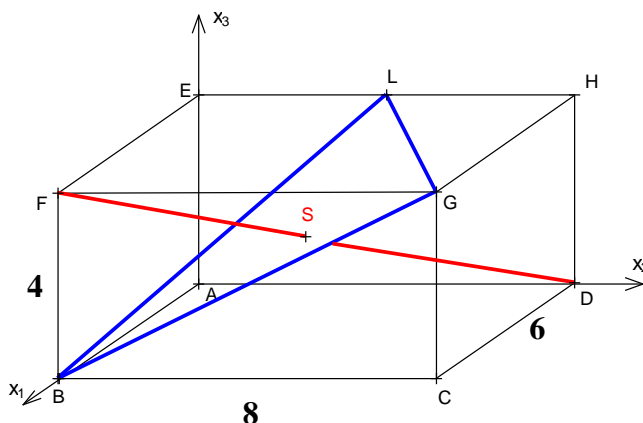
Q12 * Mathematik m6 * Extemporale am 18.03.2014

1. Im abgebildeten Koordinatensystem ist ein Quader mit den Kantenlängen 6, 8 und 4 gegeben.

Es gilt: $A(0/0/0)$, $G(6/8/4)$

L ist der Mittelpunkt der Strecke [EH] und die Ebene E ist durch die drei Punkte B, G und L bestimmt.

Die Gerade g ist durch die Punkte F und D festgelegt.



- a) Bestimmen Sie eine Normalenform der Ebene E.
[Mögliches Ergebnis: $E : 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 12 = 0$]
- b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden $g = FD$ mit der Ebene E.
Unter welchem Winkel schneidet g die Ebene E?
- c) Gesucht ist der Mittelpunkt M einer Kugel mit folgenden Eigenschaften:
M liegt auf der Geraden $g = FD$, der Kugelradius hat den Wert $r = 3$ und die Kugel berührt die Ebene E.
Begründen Sie kurz, dass es zwei solche Mittelpunkte gibt und bestimmen Sie die Koordinaten eines dieser beiden Mittelpunkte.
2. Der Punkt $P(5/0/2)$ soll an der Ebene E mit $E : 2x_1 + x_2 - x_3 + 4 = 0$ gespiegelt werden.
Bestimmen Sie die Koordinaten des gespiegelten Punktes P^* .

Aufgabe	1a	b	c	2	Summe
Punkte	4	5	5	5	19



Gutes Gelingen! G.R.

Q12 * Mathematik m6 * Extemporale am 18.03.2014 * Lösung

$$1. a) \overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ 8-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{BL} = \begin{pmatrix} 0-6 \\ 4-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$E: (\vec{X}-\vec{B}) \circ \vec{n}_E = 0 \Leftrightarrow 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - (6 \cdot 2 - 0 \cdot 3 + 0 \cdot 6) = 0$$

$$\text{also } E: 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 12 = 0$$

$$b) \overrightarrow{FD} = \begin{pmatrix} 0-6 \\ 8-0 \\ 0-4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } g = FD: \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt $g \cap E = \{S\}$:

$$2 \cdot (6-3r) - 3 \cdot (0+4r) + 6 \cdot (4-2r) - 12 = 0 \Leftrightarrow 24 - 30r = 0 \Leftrightarrow r = 0,8$$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 0,8 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,6 \\ 3,2 \\ 2,4 \end{pmatrix} \text{ also } S(3,6/3,2/2,4) \text{ und f\u00fcr den Schnittwinkel } \varphi \text{ gilt}$$

$$\sin \varphi = \frac{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{9+16+4} \cdot \sqrt{4+9+36}} = \frac{|-6-12-12|}{\sqrt{29} \cdot 7} = \frac{30}{\sqrt{29} \cdot 7} \Rightarrow \varphi = 52,734...^\circ \approx 52,7^\circ$$

c) $d(M; \text{Ebene } E) = \pm 3$, daher gibt es zwei L\u00f6sungen f\u00fcr M

$$E_{\text{HNF}}: \frac{1}{7}(2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 12) = 0 \text{ f\u00fcr } M(m_1/m_2/m_3) \text{ gilt daher}$$

$$\frac{1}{7}(2m_1 - 3m_2 + 6m_3 - 12) = \pm 3 \text{ und } M \in g = FD \Rightarrow$$

$$\frac{1}{7}(2 \cdot (6-3r) - 3 \cdot (0+4r) + 6 \cdot (4-2r) - 12) = \pm 3 \Leftrightarrow 24 - 30r = \pm 21 \Leftrightarrow r_1 = 0,1 \text{ und } r_2 = 1,5$$

$$\vec{M}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 0,1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,7 \\ 0,4 \\ 3,8 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{M}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 1,5 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

also $M_1(5,7/0,4/3,8)$ und $M_2(1,5/6/1)$ (Hinweis: Nur ein Mittelpunkt ist verlangt!)

2. Ermittle zuerst den Fußpunkt F des Lots von P auf die Ebene E: $\{F\} = g \cap E$ mit

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ also } 2 \cdot (5+2t) + 1 \cdot t - (2-t) + 4 = 0 \Leftrightarrow 12+6t = 0 \Leftrightarrow t = -2$$

$$\text{also } \vec{F} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{FP^*} = \overrightarrow{PF} \Rightarrow \vec{P^*} = 2 \cdot \vec{F} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 2-5 \\ -4-0 \\ 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

d.h. $P^*(-3/-4/6)$